2. Der Differenzialquotient

2.1. Durchschnittliche und momentane Änderungsrate

1. **Velofahrer**
   16 km/h

2.2. Die Ableitung einer Funktion

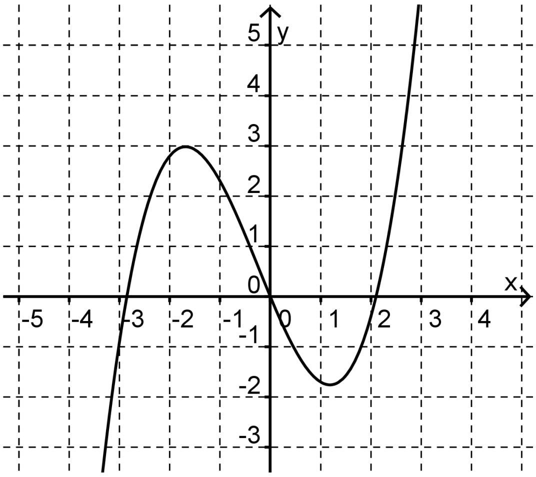
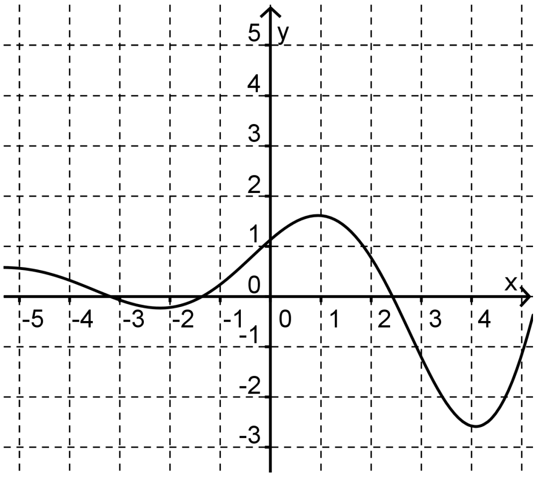
1. **Grundaufgabe**
   a) $y' = 6x$
   b) $y' = -\dfrac{12}{x^4} = -12 \cdot x^{-4}$
   c) $y' = \dfrac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}}$

2. **Theorieteil zum Ersten**
   Betrachte $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x}$
   Umformen (im Zähler gleichnamig machen, zusammenfassen und kürzen) ergibt
   $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x \cdot \Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{(x+\Delta x)\cdot x}$.
   Wenn jetzt $\Delta x \to 0$ gilt, dann wird dieser Ausdruck zu $-\dfrac{1}{x^2}$.

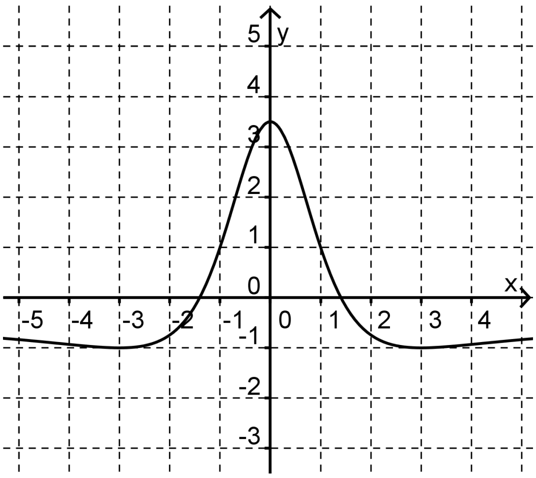
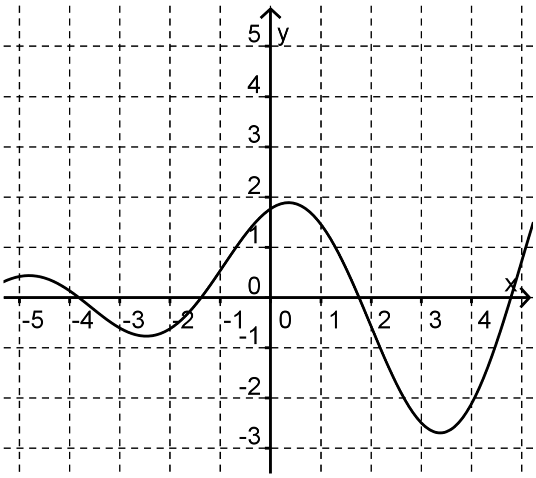
3. **Theorieteil zum Zweiten**
   Betrachte $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$
   Umformen (erweitern, zusammenfassen und kürzen) ergibt
   $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$.
   Wenn jetzt $\Delta x \to 0$ gilt, dann wird dieser Ausdruck zu $\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$.

2.3. Grafisches Ableiten

1. **Grafisches Ableiten**

2. **Übungen**

2.4. Zweite und höhere Ableitungen

1. **Technik des Differenzierens**

   a) $y' = 3x^2 - 4x + 5$, $y'' = 6x - 4$.

   b) $y' = -x^{-2} + 3x^{-4}$, $y'' = 2x^{-3} - 12x^{-5}$

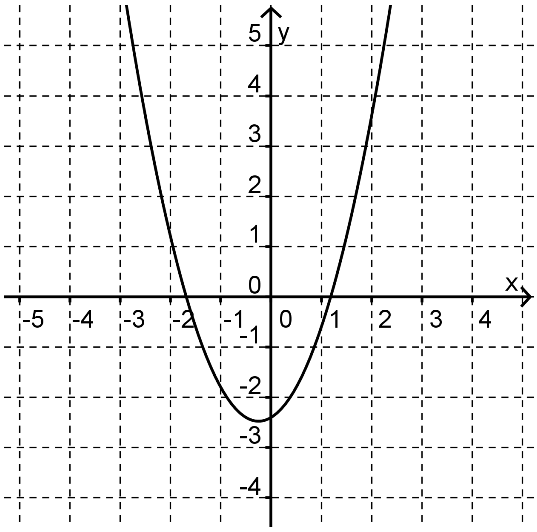
   c) $y' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $y'' = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

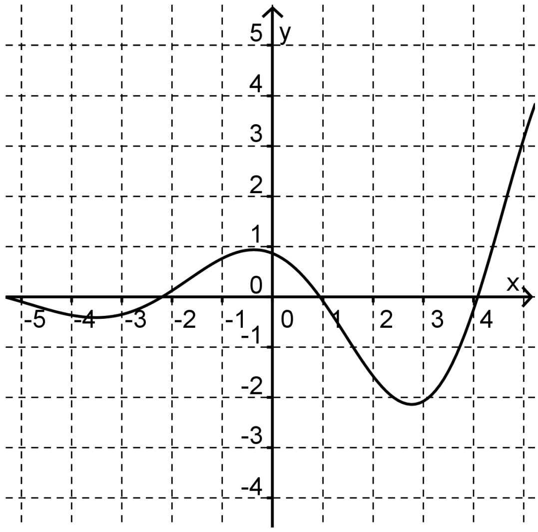
   d) $f'(x) = 20\pi \cdot x^3 + 6x$, $f''(x) = 60\pi \cdot x^2 + 6$

   e) $y' = f'(x) = -9x^{-4} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = f''(x) = 36x^{-5} + \dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$

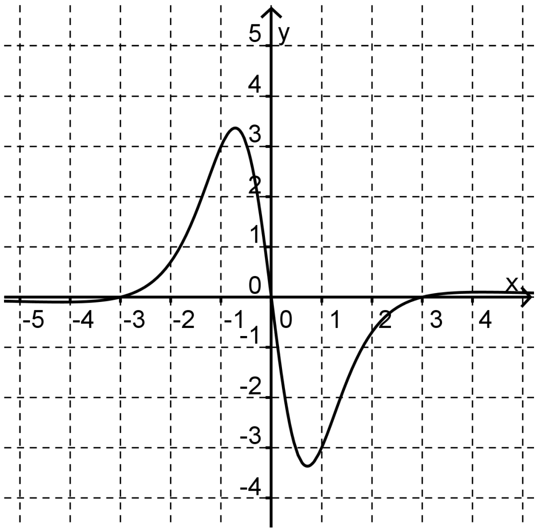
   f) $f'(x) = 3 \cdot x^{-\frac{4}{5}} + 2 \cdot x^{-6}$, $f''(x) = -\dfrac{12}{5} \cdot x^{-\frac{9}{5}} - 12 \cdot x^{-7}$

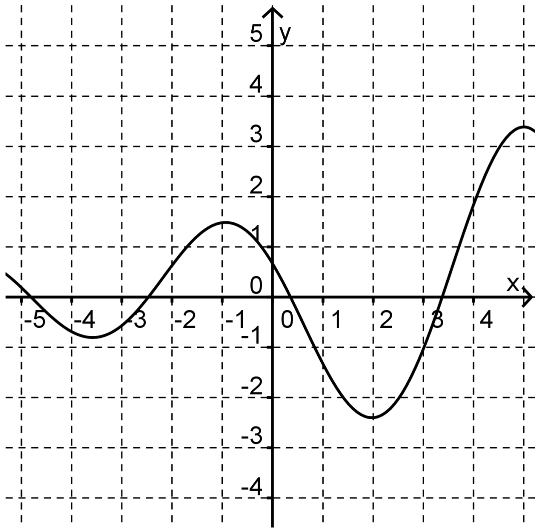
2. **Grafisches**
   Aufgaben 1:





   Übungen 2:





2.5. Ableiten von Sinus und Cosinus

1. **Technik des Differenzierens**
   $y' = f'(x) = 15x^2 - t \cdot \cos(x)$, $y'' = f''(x) = 30x + t \cdot \sin(x)$