

3. Grundaufgaben der Differenzialrechnung

3.1. Tangenten

1. Tangente

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

Bestimme die Gleichung der Kurventangente im Kurvenpunkt $P(\dots | 6)$.

2. Tangenten

Gegeben ist die Kurve $y = f(x) = x^4 - 6x^2$ und die Gerade $g: y = 8x - 25$.

- Stelle die beiden Funktionsgraphen in einer geeigneten Skizze dar.
- Welcher Punkt der Kurve liegt am nächsten zur Geraden g ?
- Bestimme die Gleichung der Kurventangente in diesem Punkt.
- Wie viele Kurventangenten parallel zu g gibt es?

3.2. Schnittwinkel

1. Schnittwinkel

Bestimme die Schnittpunkte und Schnittwinkel der Kurven $y = 2x^2 - x$ und $y = x^2 + 2$.

2. Schnittpunkte und Schnittwinkel

Gegeben sind die Funktionen $y = f_1(x) = x^3 - x^2 - 4x$ und $y = f_2(x) = 3x^2 - 5x - 6$.

- Bestimme die Koordinaten *aller* Schnittpunkte.
- Berechne den Schnittwinkel im *tiefstliegenden* Schnittpunkt.

3. Berührung, Grundsituation

- Weise nach, dass sich die beiden Funktionen $y = f_1(x) = 2x^3 - 8x$ und $y = f_2(x) = x^2 + 5$ berühren.
- Die Funktionen $y = x^3 - 21x$ und $x^2 - 45$ haben einen Berührungspunkt. Bestimme dessen Koordinaten.

4. Berühren und Schneiden (Aus einer Prüfung)

Gegeben sind die Funktionen $y = x^3 - 8x + 5$ und $y = x^2 - 7$.

Die beiden Funktionskurven haben einen Schnittpunkt S und einen Berührungspunkt B . Bestimme

- die Koordinaten dieser beiden Punkte S und B ,
- im Schnittpunkt S den spitzen Schnittwinkel,
- die Gleichung der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt B .

5. Zwei Funktionen (Aus einer Prüfung)

Gegeben sind die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

und die Parabel $y = g(x) = \frac{2}{3}x^2$.

- Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts und in diesem Punkt den Zwischenwinkel der beiden Funktionskurven.
- Wenn man die Parabel parallel zur y -Achse nach oben verschiebt, dann berühren sich die beiden Kurven im I. Quadranten. Um wie viele Einheiten muss man nach oben schieben und wo liegt dann der Berührungspunkt? Bestimme dessen Koordinaten.

6. Schnittwinkel (Aus einer Prüfung)

Zwei unabhängige Teilaufgaben zu Schnittwinkeln

- Gegeben sind die Funktionen $y = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ und $y = \frac{25}{2} - \frac{1}{4}x^2$.

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts und den *spitzen* Schnittwinkel.

- Die Gerade $y = \frac{1}{2}x + v$ soll die Parabel $y = x^2$ im I. Quadranten unter dem Winkel von genau 22.5° schneiden. Wie gross ist v ?
Hinweis: Berechne zuerst den Steigungswinkel der Geraden.

3.3. Kurvennormalen

1. Grundsituation

- Gegeben ist $y = \sqrt{x}$.
Bestimme die Gleichung der Kurvennormalen im Kurvenpunkt $(9 | \dots)$
- Gegeben ist die Funktion $y = x^3 - 4x^2 - 2$.
Der Punkt $P(3 | -11)$ liegt auf der Funktionskurve. Bestimme die Gleichung der Kurvennormalen im Punkt P .

2. Rechtwinklig schneiden

Zeige, dass sich die Parabeln $y = x^2$ und $y = \frac{17}{4} - \frac{x^2}{16}$ rechtwinklig schneiden.

3. Tangente und Normale (Aus einer Prüfung)

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2$

und auf der Funktionskurve der Punkt $P(x_P | 4)$.

- Bestimme die fehlende Koordinate des Kurvenpunkts $P(x_P | 4)$.
Wähle die *positive* Lösung für x_P fürs Weiterrechnen.
- Bestimme die Gleichung der Kurventangente im Punkt P .
- Die Kurvennormale im Punkt P schneidet die x -Achse im Punkt Q .
Bestimme die Koordinaten dieses Punktes Q .