

4. Kurvenbetrachtungen

4.1. Kurvendiskussion

1. Grundsituation

Bestimme die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extremalstellen, Wendepunkte)

a) $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

c) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5$

d) $y = f(x) = x^4 - 3x^2 - 1$

2. Mehrfache Nullstellen

Führe eine Kurvendiskussion durch.

a) $y = f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

b) $y = f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^4 - x^3 + 2x^2$

3. Terrassenpunkte

a) $y = f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$

b) $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

4. Wendetangenten

Gegeben ist $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5$.

a) Bestimme die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte.

b) Bestimme die Gleichungen der beiden Wendetangenten.

5. Mehrfache Nullstellen

$$y = f(x) = x^5 - 6x^4 + x^3 + 24x^2 + 16x.$$

Bestimme alle Nullstellen inkl. Vielfachheit.

6. Überlegungsaufgabe

Finde eine Funktion mit drei Terrassenpunkten.

7. Anzahlen

a) Wie viele Nullstellen kann eine Polynomfunktion 6. Grades haben?

b) Wie viele Wendepunkte kann eine Polynomfunktion 6. Grades haben?

8. Wendetangenten

$$\text{Gegeben ist } y = f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2.$$

Bestimme den Schnittpunkt und den spitzen Zwischenwinkel der beiden Wendetangenten.

9. Kurvendiskussion (Aus einer Prüfung)

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x + \frac{5}{4}$.

- Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch, d.h. bestimme die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte.
- Bestimme die Wendetangente im Wendepunkt, der im I. Quadranten liegt.

4.2. Symmetrische Funktionsgraphen

1. Symmetrie

Ist der Funktionsgraph zu $y = f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 3x$ symmetrisch und - wenn ja - welche Art von Symmetrie hat der Graph?

2. Symmetrie

Ist der Funktionsgraph zu $y = f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ symmetrisch und - wenn ja - welche Art von Symmetrie hat der Graph?

4.3. Kurven bestimmen

1. Polynomfunktionen bestimmen

Bestimme jeweils die Funktionsgleichung.

- Bestimme diejenige Polynomfunktion 3. Grades, welche im Ursprung die x -Achse und an der Stelle $x = 3$ die Gerade $y = x + 4$ als Tangenten haben.
- Bestimme diejenige Polynomfunktion 4. Grades, welche im Punkt $(0|5)$ einen Terrassenpunkt hat und die x -Achse im Punkt $(1|0)$ berührt.
- Gesucht ist eine Polynomfunktion 3. Grades, welche in $(0|2)$ einen Wendepunkt hat und die x -Achse an der Stelle $x = 3$ berührt.

2. Polynomfunktion (Aus einer Prüfung)

Eine Polynomfunktion 4. Grades besitzt (gleichzeitig) folgende Eigenschaften:

(I): Die Kurve geht durch den Punkt $(1|3)$ und besitzt dort Steigung $m = 2$.

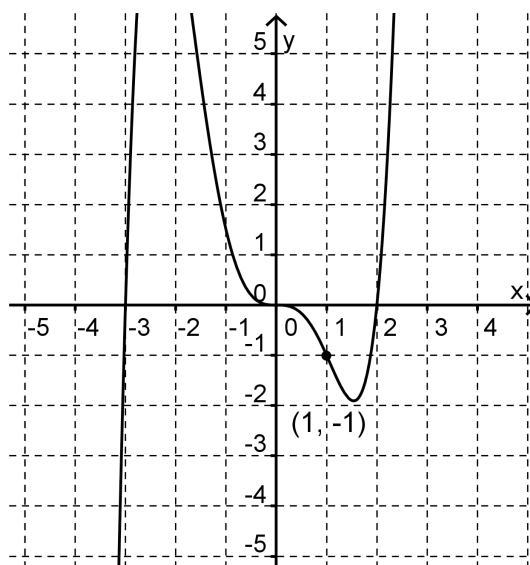
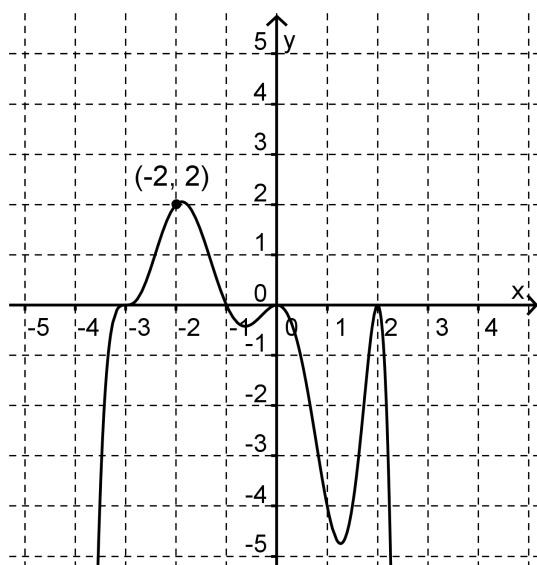
(II): Sie hat einen Terrassenpunkt auf der y -Achse.

(III): Sie schneidet die x -Achse an der Stelle $x = -1$.

- Bestimme die Gleichung dieser Funktion
- Stelle den Funktionsgraphen und die oben erwähnten Eigenschaften in einer einigermassen genauen Figur dar.

3. Grafiken

Bestimme die Funktionsgleichungen anhand der Nullstellen und dem eingezeichneten Kurvenpunkt. Hinweis: Nullstellen sind höchstens dreifach.



4. Parameter gesucht

$y = f(x) = x^4 - t \cdot x^2$ schneidet die x -Achse im Winkel $\alpha = 45^\circ$. Berechne t .

5. Parameter

Die Kurve $y = f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2$ geht durch die Punkte $(-2 | -1)$ und $(4 | 2)$. Bestimme a und b .

4.4. Extremalwertaufgaben

1. Minimaler Abstand

Welcher Punkt der Kurve $y = \frac{x^3}{3} - x$ liegt am nächsten zum Punkt $(1 | 1)$?

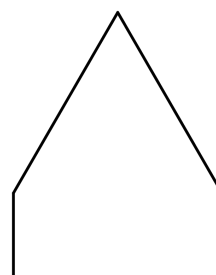
2. Maximale Fläche

Eine Figur besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang der Figur beträgt 2 m. Bestimme Breite und Höhe des Rechtecks so, dass die Figur möglichst grosse Fläche hat.

3. Maximale Fläche

Die Figur besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem gleichseitigem Dreieck. Die Figur soll einen Meter Umfang und maximale Fläche haben.

Berechne die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks und die maximal mögliche Fläche.



4. Ein Rechteck einbeschreiben

Der oberhalb der x -Achse liegenden Fläche unterhalb der Kurve $y = 4 - x^2$ wird ein Rechteck einbeschrieben, von dem eine Seite auf der x -Achse liegt.

Wie hoch wird das Rechteck, wenn es maximale Fläche haben soll?

5. Extremalwertaufgabe (Aus einer Prüfung)

Die Skizze zeigt ein Stück der Funktion

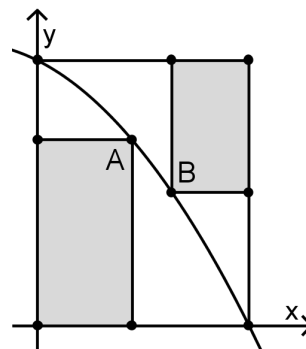
$$y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}.$$

(Das grosse Rechteck wird begrenzt durch die Parallelen zu den Koordinatenachsen in den Schnittpunkten der Kurve mit den Achsen.)

Bestimme die Koordinaten der beiden Kurvenpunkte A und B so, dass die schraffierten Rechtecke maximale Fläche haben.

Hinweis: Rechne für A resp. B einzeln.

Welchen prozentualen Anteil an der Gesamtfläche des grossen Rechtecks können die beiden schraffierten Rechtecke zusammen maximal ausmachen?



6. Minimale Steigung

In welchem Punkt ist die Kurve $y = x^3 + 1.5x^2 + 4x - 217$ am flachsten?

7. Quader

Aus 108 cm Draht soll das Modell eines Quaders hergestellt werden. Wie gross kann dessen Volumen höchstens werden, wenn die Bodenfläche ein 2×1 -Rechteck sein soll?