5. Gebrochen rationale Funktionen

5.1. Produkt- und Quotientenregel

1. **Bemerkung**
   Bekannt ist, wie man Potenzen ableitet und dass man eine Summe summandenweise ableiten darf. Ein Produkt darf man aber nicht faktorweise ableiten.

2. **Produktregel**
   Gegeben ist eine Funktion, die aus 2 Faktoren besteht, also $y(x) = f(x) \cdot g(x)$.
   Dann gilt $y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ oder in Kurzform $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

3. **Musterbeispiele**
   a) $y = f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$ ....

   ....

   b) $y = f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$ ....

   ....

   c) $y = f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ ....

   ....

   d) $y = f(x) = \left(5x^2 + \sin(x)\right)^2$ ....

   ....

   e) $y = f(x) = (3x^2 - 5) \cdot (4 - \sqrt{x})$ (ohne Ausmultiplizieren) ....

   ....

4. **Potenzen**
   a) $y = f(x) = (\sin(x))^2$ ....

   ....

   b) Wir verallgemeinern: $y = (f(x)^2) = f^2(x)$ ....

   ....

   c) Berechne die Ableitung von $(4x^3 - 5x)^2$ ....

   ....

   d) Finde eine Formel für $(f^3(x))' =$ ....

   ....

   ....

   ....

   e) Verallgemeinerung: $(f^n(x))' =$ ....

   ....

5. **Musterbeispiele**

a) $y = f(x) = (3x-5)^3$. Bestimme $f'(x) =$ ....

....

b) $y = \sqrt{x^2+6}$ ....

....

....

c) $y = \dfrac{1}{(4x-7)^5}$ ....

....

> **Übungen**
>
> a) Leite ab: $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x)$
>
> b) Ebenso: $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3x^3-3}}$

6. **Quotientenregel**

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{oder in Kurzform} \quad \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

7. **Beweis**

Wir beginnen mit $y(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ oder kurz $y = \dfrac{f}{g}$. Gesucht ist $y'(x)$, kurz y'.

Um die Quotientenregel zu beweisen, schreiben wir so um, dass wir die Produktregel verwenden können.

8. **Musterbeispiele**

a) $y(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Bestimme y' und y''.

b) $y(x) = \dfrac{x^3}{x^2-8}$. Bestimme y' und y''.

9. **Ableitung der Tangens-Funktion**

$(\tan(x))' =$

Übungen

a) $y(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$. Bestimme y' und y''.

b) $y(x) = \dfrac{7x^6}{\sqrt[5]{4x^3-2}}+1$. Die zweite Ableitung ist ziemlich schwierig.

5.2. Kurvenbetrachtungen

1. **Definition**

   Eine Funktion der Art $y(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, heisst gebrochen rationale Funktion. Der Grad von $p(x)$ heisst Zählergrad, der Grad von $q(x)$ heisst Nennergrad.

2. **Bemerkung**

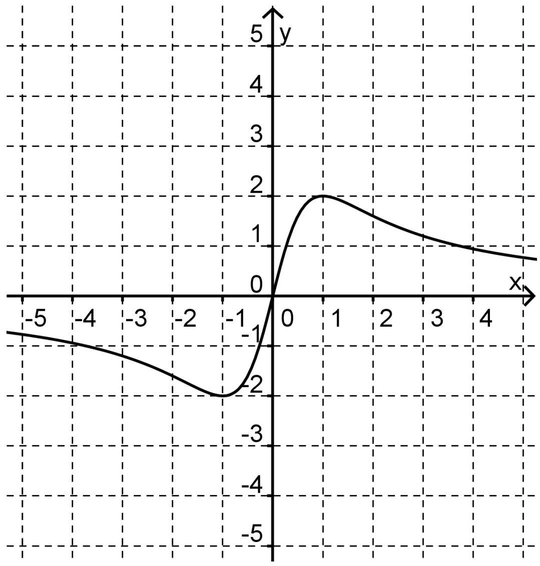
   Die Grundaufgaben der Kurvendiskussion (Bestimmen der Nullstellen, Extremalstellen und Wendestellen mitsamt den zugehörigen Kurvenpunkten) gelten auch für gebrochen rationale Funktionen.
   Die (reine) Technik des Ableitens ist auf den vorhergehenden Seiten behandelt. Deshalb werden in diesem Kapitel die Funktionen stets mitsamt ihren Ableitungen gegeben.
   Die vorkommenden Gleichungen sind entweder von Hand lösbar oder dann sind sie mit einem Taschenrechner zu ermitteln, der quadratische und kubische Gleichungen lösen kann. Notfalls genügt auch ein Taschenrechner, der Gleichungen numerisch löst.

3. **Musterbeispiel I**

   $$y(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

   $$y'(x) = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2}$$

   $$y''(x) = \frac{8x^3-24x}{(x^2+1)^3}$$

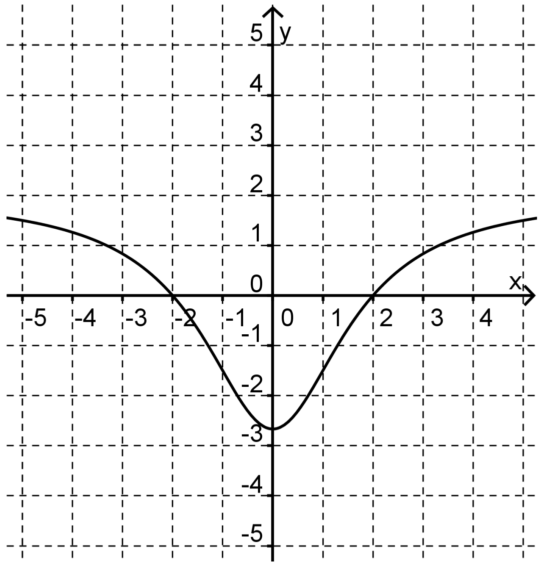


4. **Musterbeispiel II**

$$y(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3}$$

$$y'(x) = \frac{28x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y''(x) = \frac{84 - 84x^2}{(x^2 + 3)^3}$$

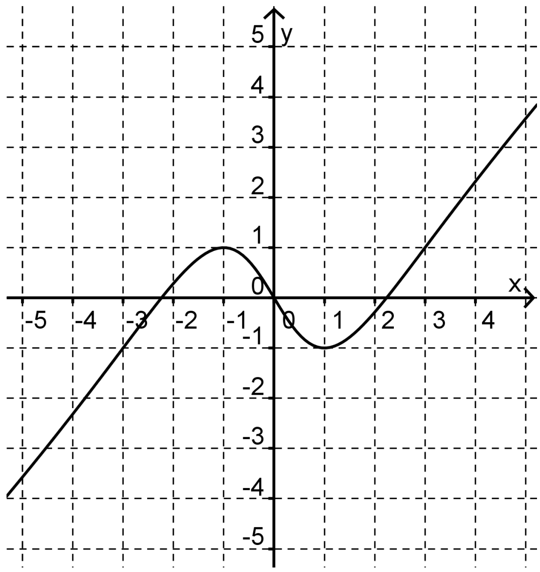


5. **Musterbeispiel III**

$$y(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 3}$$

$$y'(x) = \frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y''(x) = \frac{144x - 16x^3}{(x^2 + 3)^3}$$



6. **Symmetriebetrachtungen**
   a) Ein Polynom ist gerade, das andere ungerade. (Musterbeispiele I und III)

   b) Zählerpolynom und Nennerpolynom sind beide gerade. (Musterbeispiel II)

   c) Wenn Zählerpolynom und Nennerpolynom beide ungerade sind, dann hat man beispielsweise $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + x}{x^3 + 2x}$

7. **Verhalten im Unendlichen**
   a) Wenn der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad ($Z < N$): Beispiel I

   b) Wenn Zählergrad und Nennergrad gleich sind ($Z = N$): Beispiel II

   c) Wenn $Z = N + 1$:, Beispiel III: $y(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2 + 3} = x - \dfrac{8x}{x^2 + 3}$

8. **Asymptoten**

Eine horizontale oder schräge Asymptote beschreibt das Verhalten des Funktionsgraphen für $x \to \pm\infty$. Eine horizontale Asymptote kann (in der Mitte des Koordinatensystems) von der Funktionskurve geschnitten werden.
Die Fälle $Z > N+1$ betrachten wir nicht. Es gibt dann keine geradlinige Asymptote.

9. **Definitionsbereich**

In den bisherigen Beispielen konnte das Nennerpolynom nie gleich Null werden. In diesen Fällen ist die Funktion überall definiert.

Wir notieren ....

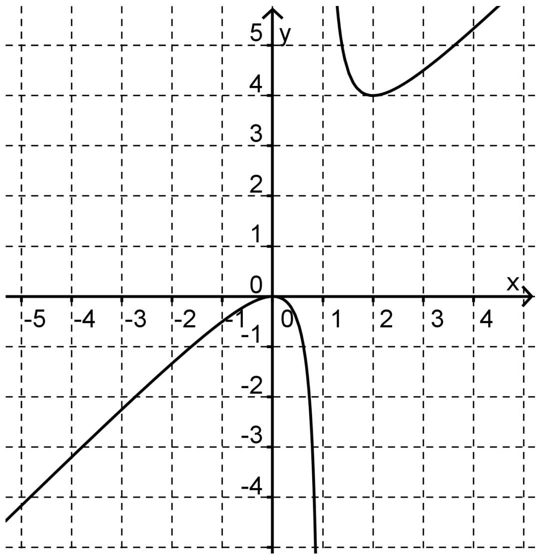
In den folgenden Musterbeispielen weist das Nennerpolynom auch Nullstellen auf.
Somit entstehen Definitionslücke(n).
Dadurch wird der Funktionsgraph unterteilt. Man spricht aber immer noch von *einer* Kurve (bestehend aus mehreren Kurvenbogen).

10. **Musterbeispiel IV**

$$y(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$y'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

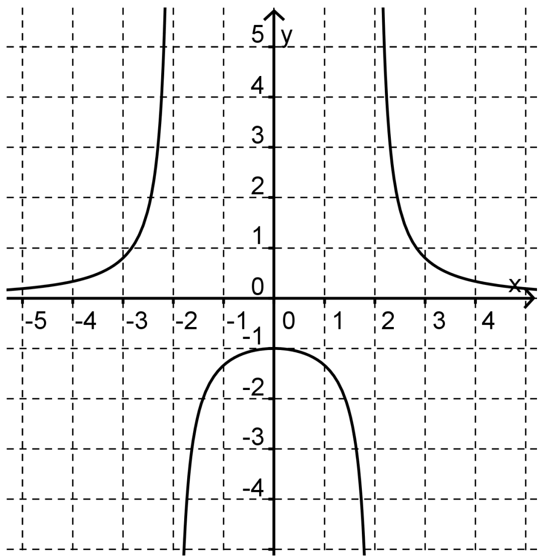


11. **Musterbeispiel V**

$$y(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$$

$$y'(x) = \frac{-4x}{(x^2-4)^2}$$

$$y''(x) = \frac{12x^2 + 16}{(x^2-4)^3}$$

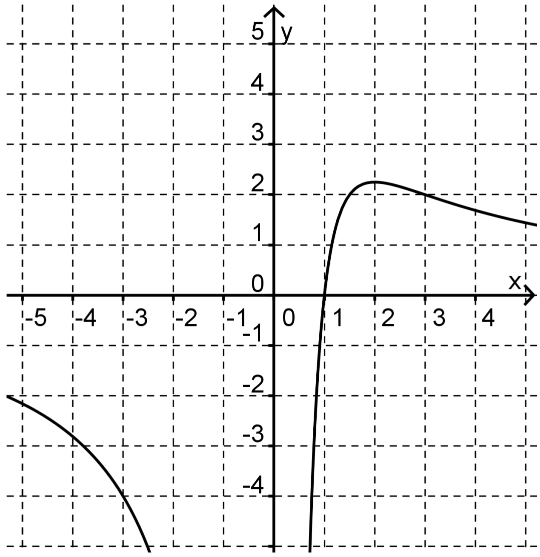


12. **Musterbeispiel VI**

$$y(x) = \frac{9x - 9}{x^2}$$

$$y'(x) = \frac{18 - 9x}{x^3}$$

$$y''(x) = \frac{18x - 54}{x^4}$$



13. **Definition**

In den Nullstellen des Nennerpolynoms ist die Funktion nicht definiert. Es entsteht also eine (oder mehrere) Definitionslücke(n).

Eine solche Definitionslücke nennt man ....

Zu jeder Polstelle gehört ....

5.3. Anwendungen

1. **Vorgegebene Steigung**

   Wie gross muss t sein, damit die Kurve $y(x) = \dfrac{1}{x^2+t}$ (mit $y'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+t)^2}$) an der Stelle $x = 2$ die Steigung $m = -1$ aufweist?

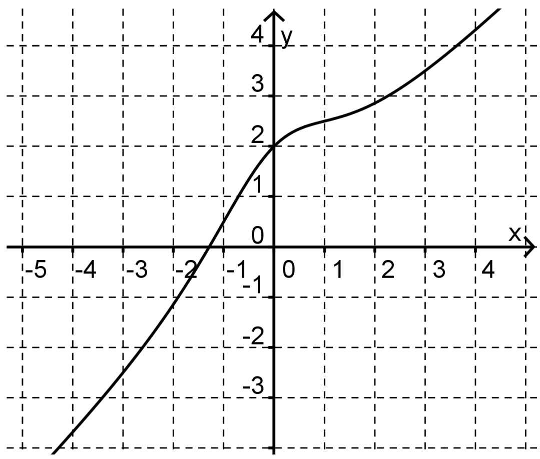
2. **Kleinste Steigung**

   Gegeben ist $y(x) = \dfrac{x^3+3x+6}{x^2+3}$

   $$y'(x) = \frac{x^4+6x^2-12x+9}{(x^2+3)^2}$$

   $$y''(x) = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}.$$

   In welchem Punkt ist diese Kurve am *flachsten*?



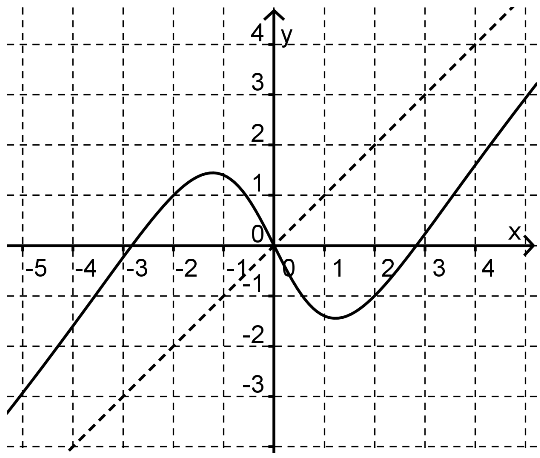
3. **Grösste Entfernung**

Gegeben ist die Funktion

$$y(x) = \frac{x^3 - 8x}{x^2 + 4} = x - \frac{12x}{x^2 + 4}$$

$$y'(x) = \frac{x^4 + 20x^2 - 32}{(x^2 + 4)^2}$$

$$y''(x) = \frac{24 \cdot (12x - x^3)}{(x^2 + 4)^3}.$$



In welchen Punkten ist die Kurve am weitesten von ihrer Asymptoten entfernt?

4. **Wendetangente**

Gegeben ist die Funktion $y(x) = \dfrac{9x - 9}{x^2}$, $\quad y'(x) = \dfrac{18 - 9x}{x^3}$, $\quad y''(x) = \dfrac{18x - 54}{x^4}$

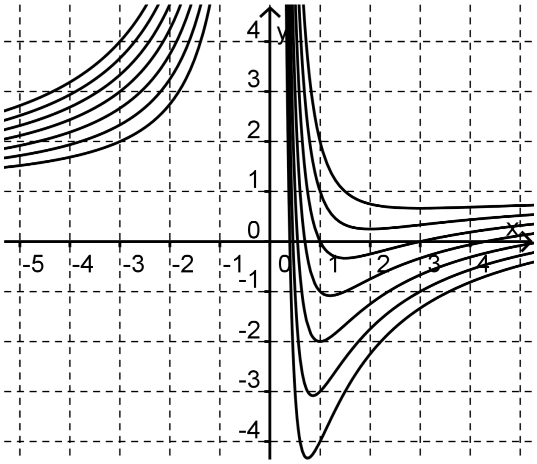
Wie lautet die Gleichung der Wendetangente?

5. **Die Kurve aller Minima**

Für jedes $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = \dfrac{x^2 - t \cdot x + 3}{x^2}$ eine Kurve gegeben.

Wir betrachten also eine Kurvenschar mit Parameter t.

$f_t'(x) = \dfrac{t \cdot x - 6}{x^3}$, $f_t''(x) = \dfrac{18 - 2t \cdot x}{x^4}$.



Berechne die Koordinaten des Minimums, abhängig von t.

Weise nach, dass alle Minima der betrachteten Kurven $f_t(x)$ auf einer weiteren Kurve mit der Gleichung $y = 1 - \dfrac{3}{x^2}$ liegen.

6. **Funktion bestimmen**

   Gesucht ist eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion mit den Asymptoten $x = 2$, $x = -1$ und $y = 4$.

7. **Knacknuss**

   Gegeben ist $y(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2}$

   Von welchen Punkten der y-Achse aus gibt es (mindestens) eine Tangente an die Kurve. Von Interesse ist besonders der oberste (höchstliegende) Punkt auf der y-Achse, für den eine Tangente möglich ist.