6. Funktionen verknüpfen, Kettenregel

6.1. Technik des Differenzierens

1. **Verknüpfen von Funktionen**

   Wir führen zwei Funktionen hintereinander aus. Der Mathematiker nennt das Verknüpfen oder Verschachteln von Funktionen.

   Wenn wir $f(g(x))$ schreiben, dann wird zuerst $g(x)$ ausgeführt. Das Ergebnis bezeichnen wir mit u. Erst dann wird $f(u)$ ausgeführt.
   $g(x)$ ist die innere Funktion, $f(u)$ die äussere Funktion.

2. **Musterbeispiel**

   Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \cos(x)$ und $h(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Bestimme die Funktionsgleichungen der folgenden Verknüpfungen.

   a) $f(g(x)) =$ ....

   b) $g(f(x)) =$ ....

   c) $g(h(x)) =$ ....

   d) $h(g(x)) =$ ....

   e) $f(g(h(x))) =$ ....

3. **Ableiten verknüpfter Funktionen**

   Gegeben sind die Funktionen $y = f(u)$ und $u = g(x)$. Wir leiten $y' = \big(f(g(x))\big)'$ her.

4. **Hyperbel**
   $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
   Die durch diese Gleichung beschriebene Kurve ist ein Hyperbelbogen. Der Querschnitt eines AKW-Kühlturms besteht aus zwei Hyperbelbogen.

5. **Musik**
   $y = f(x) = \sin(4x)$.
   Wenn die Frequenz einer Schwingung vervierfacht wird, dann wird der erzeugte Ton um zwei Oktaven höher.

6. **Synthesizer**
   $y = f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$.
   Das ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen.

7. **Technik des Differenzierens**
   a) $y = \left(x^2 + \sqrt{x}\right)^4$ ....
   b) $y = \sqrt{2 + \sin(3x - \pi)}$ ....
   c) $y = \left(3 \cdot \cos(3x^3 - 3\pi)\right)^3$ ....

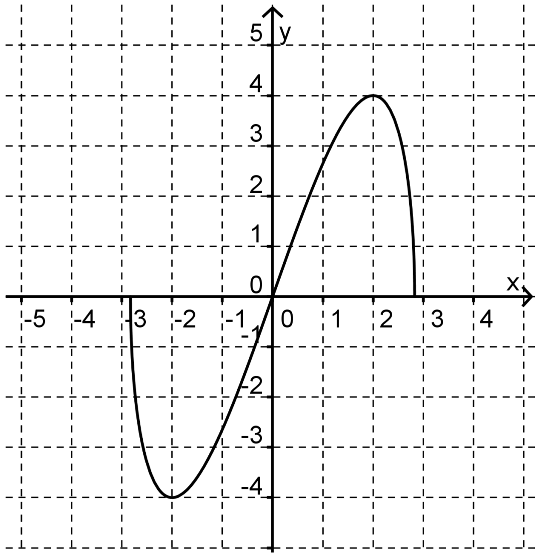
Zusatzaufgabe
$y = f(x) = \sqrt[3]{4 - x^3}$. Leite zweimal ab.

6.2. Anwendungen

1. **Kurvendiskussion**

   $y = f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}.$

   $$f'(x) = \frac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}}, \quad f''(x) = \frac{2x^3 - 24x}{(8 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



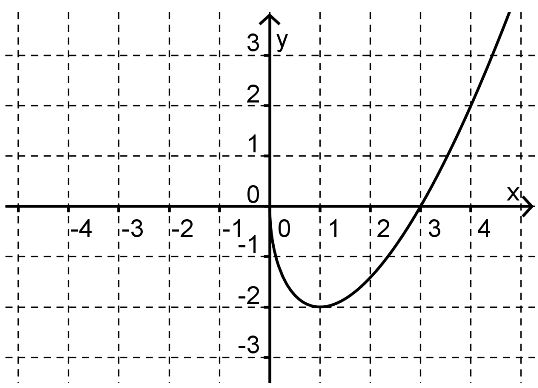
2. **Übung**

   Diskutiere die Kurve:

   $y = f(x) = (x - 3) \cdot \sqrt{x}$

   $$f'(x) = \frac{3x - 3}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

   $$f''(x) = \frac{3x + 3}{4 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$$



3. **Maximaler Umfang**

   Einem Halbkreis mit Radius 1 m wird ein Rechteck einbeschrieben, so dass eine Rechtecksseite auf dem Durchmesser des Halbkreises liegt. Welche Höhe hat das Rechteck, wenn dessen Umfang maximal sein soll?

4. **Maximale Querschnittsfläche**

   Eine oben offene Rinne soll aus drei Brettern gleicher Breite hergestellt werden. Wie muss die Rinne beschaffen sein, damit sie möglichst grosses Fassungsvermögen hat? Die mathematische Version dieser Aufgabe lautet: Welches gleichschenklige Trapez mit drei gleichlangen Seiten hat maximale Fläche?