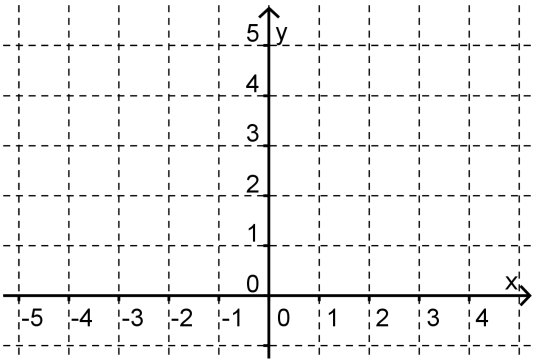
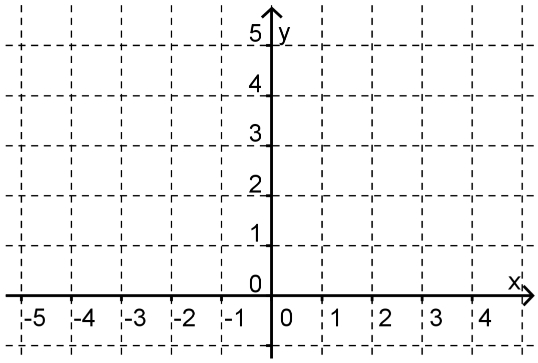
7. Verschiedene Funktionen

7.1. Exponentialfunktionen

1. **Eine Differenzialgleichung:** $y'(x) = y(x)$

   Wir suchen eine Funktion, aber nicht $y = 0$, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Folglich suchen wir eine Funktion, für die stets der Funktionswert und die Steigung im betreffenden Punkt gleich sind.





2. **Definition**

   Die Zahl e ist die Eulersche Zahl.
   Es gibt mehrere Möglichkeiten, e zu definieren. Eine davon ist $\mathrm{e} := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
   Der numerische Wert ist etwa $\mathrm{e} = 2.718281828\ldots$
   Die Funktion $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ ist die (natürliche) Exponentialfunktion.

3. **Satz**

   Für die Funktion $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ gilt $y' = f'(x) = \mathrm{e}^x$.

   Die Herleitung der Zahl e sowie der Beweis des Satzes erfordert einige Rechnung.

4. **Technik des Differenzierens**

Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $y = f(x) = \mathrm{e}^{4x}$ ....

....

Praktische Bedeutung: Bevölkerungsexplosion, Zins und Zinseszins.

b) $y = f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ....

....

Praktische Bedeutung: Exponentielle Abnahme, Radioaktivität.

c) $y = f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x)$ ....

....

Praktische Bedeutung: Gedämpfte oder abklingende Schwingung.

d) $y = f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}$ ....

....

Praktische Bedeutung: Überlagerung.

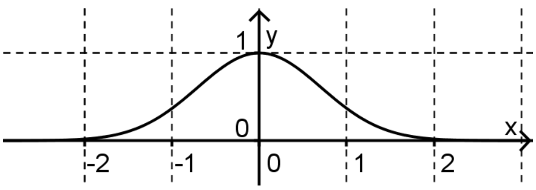
Übungen

Leite zweimal ab: $y = f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$

Ebenso: $y = f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

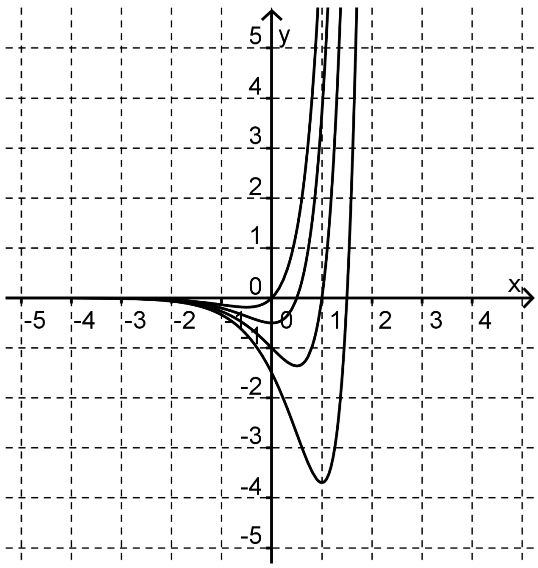
5. **Kurvendiskussion**

Die in der Statistik wichtige Gauss'sche Glockenkurve hat im Wesentlichen die Form $y = f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $y' = f(x) = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$, $y'' = f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$.



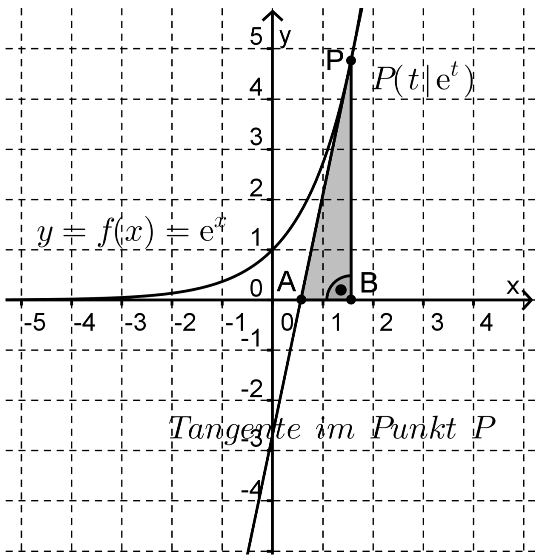
6. **Kurvenschar**

Gegeben ist $y = f_t(x) = (x - t) \cdot \mathrm{e}^{2x}$.
$y' = f_t'(x) = (2x - 2t + 1) \cdot \mathrm{e}^{2x}$
Die Minima aller dieser Kurven liegen auf einer weiteren Kurve.
Bestimme deren Gleichung.



7. **Anwendung**

Betrachte die Figur. Wie lang ist AB, abhängig von t?



Übungen

Diese Beispiele dienen zur Repetition.

a) Bestimme den Schnittwinkel der Kurven $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ und $y = f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$.

b) Welcher Punkt auf $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ hat zur Geraden $y = 2x$ kleinsten Abstand?

8. **Ableiten beliebiger Exponentialfunktionen**
   Wir leiten her, wie man beispielsweise $y = 2^x$, oder allgemein $y = b^x$ ableitet.
   Das geschieht in mehreren Schritten.

   a) Die Umkehrfunktion von $y = \mathrm{e}^x$ ist die natürliche Logarithmusfunktion $y = \ln(x)$.
   Dann gilt:

   b) Wir benötigen ein Logarithmusgesetz:

   c) Gegeben ist $y = f(x) = b^x$. Bestimme $f'(x)$.

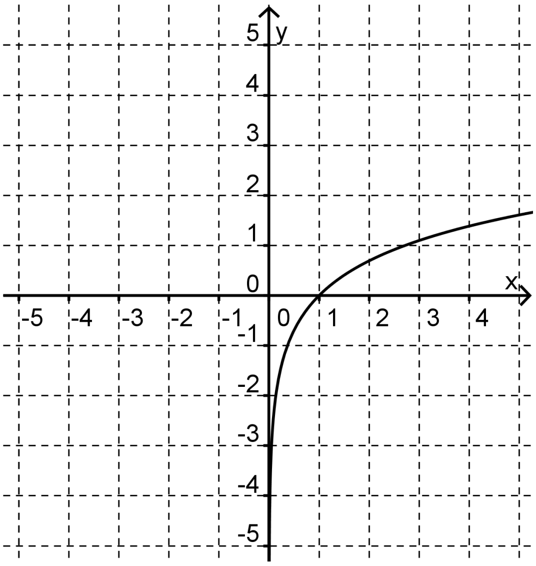
9. **Technik des Differenzierens**
   Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

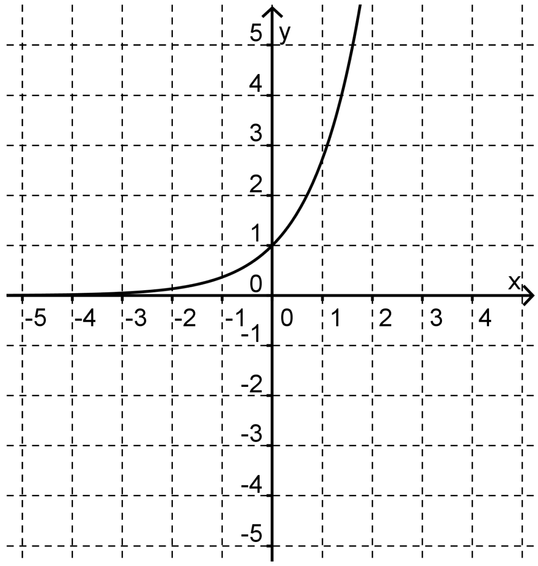
   a) $y = x^4 + 4^x$
   b) $y = 3^x \cdot \sin(x)$

7.2. Die natürliche Logarithmusfunktion

1. **Ableiten von** $\ln(x)$

   Wir beweisen, dass $\Big[\ln(x)\Big]' = \dfrac{1}{x}$.





2. **Technik des Differenzierens**

   Leite ab:

   a) $y = x^4 \cdot \ln(x)$ ....

   b) $y = \ln(x^2 + 4)$ ....

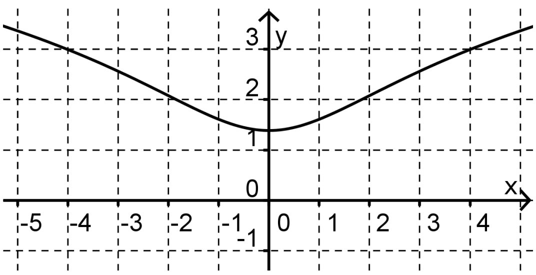
   c) $y = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ ....

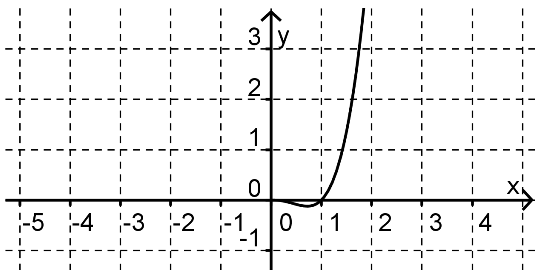
Zusatz

Bestimme von den obigen Beispielen $y = x^4 \cdot \ln(x)$ und $y = \ln(x^2+4)$ auch noch die zweite Ableitung.

3. **Kurvendiskussion**

$y = \ln(x^2+4)$, $y' = \dfrac{2x}{x^2+4}$, $y'' = \dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$





4. **Kurvendiskussion**

$y = x^3 \cdot \ln(x)$, $y' = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2$, $y'' = 6x \cdot \ln(x) + 5x$

5. **Kurventangente**

Welche Tangente an die Kurve $y = \ln(x)$ geht durch den Punkt $(\,0\,|\,5\,)$?
Bestimme auch die Koordinaten des Berührpunkts.

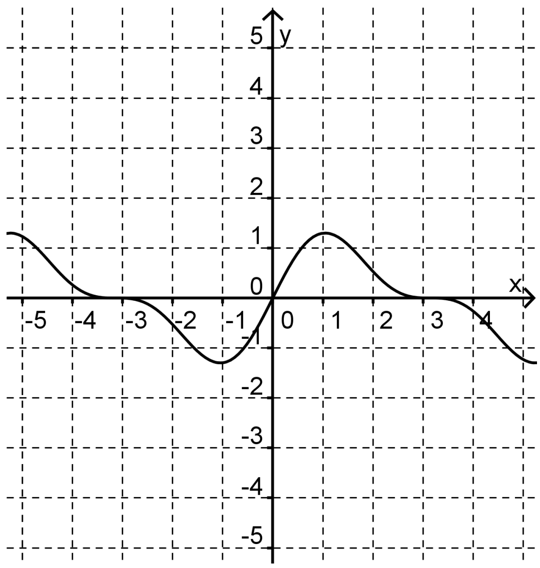
7.3. Trigonometrische Funktionen

1. **Bemerkung**

   Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen wurden in früheren Kapiteln hergeleitet oder begründet.

2. **Kurvendiskussion**

   $y = f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$



3. **Schnittwinkel**

   Beweise, dass sich die Kurven $y = \cos(x)$ und $y = \tan(x)$ rechtwinklig schneiden.

4. **Extremalwertaufgabe**

   Aus vier Brettern von je 10 cm Breite soll ein Kanal mit möglichst grossem Fassungsvermögen gebaut werden, wobei zwei Bretter senkrecht stehen sollen.
   Die mathematische Version dieser Aufgabe lautet: Wie gross muss der eingezeichnete Winkel sein, damit die Figur möglichst grosse Fläche hat?