

7. Verschiedene Funktionen

7.1. Exponentialfunktionen

1. Technik des Differenzierens

Bestimme die ersten beiden Ableitungen ohne Taschenrechner

a) $y = f(x) = e^{3x} \cdot \sin(x)$

b) $y = f(x) = x^3 \cdot e^x$

2. Kurvendiskussion

Diskutiere die Kurve $y = f(x) = (x - 3) \cdot e^x$.

3. Wendetangente

$$y = x^2 \cdot e^x.$$

Bestimme die Tangente im Wendepunkt, der näher zum Koordinatenursprung liegt.

4. Schnittwinkel

In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven

$$y = f_1(x) = 2(x + 1) \cdot e^x \text{ und } y = f_2(x) = e^x?$$

5. Wendepunkte (Aus einer Prüfung)

Gegeben ist $y = f_t(x) = (x + t) \cdot e^x$.

- Bestimme die Koordinaten des Wendepunkts, abhängig von t .
- Für welchen Wert von t liegt der Wendepunkt auf der y -Achse?
- Alle Wendepunkte liegen auf einer weiteren Kurve. Bestimme deren Gleichung.

6. Kurvenbetrachtungen

Betrachte Funktionen $y = f_t(x) = e^x \cdot (2x - t)$.

- Setze $t = 3$ und führe eine Kurvendiskussion durch.
- Setze $t = 2$. Bestimme die Gleichung der Wendetangente und ermittle, ob diese exakt durch den Punkt $(-3 | 0)$ geht (oder nur beinahe).
- Auf welcher Kurve liegen alle Extremalwerte der betrachteten Funktionen? Handelt es sich dabei um Maxima oder Minima?
- Für welche Werte von t kann man vom Koordinatenursprung aus *genau eine* Tangente an die Kurve legen?

7. Maximale Fläche

Betrachte den Kurvenbogen zu $y = 4 - e^{\frac{x}{4}}$ im I. Quadranten.

Vom Kurvenpunkt P auf diesem Kurvenbogen legt man die Lote auf die Koordinatenachsen, womit (zusammen mit den Koordinatenachsen) ein Rechteck definiert wird.

Wo muss P liegen, damit das Rechteck maximale Fläche erhält? Berechne auch diese maximal mögliche Fläche.

7.2. Die natürliche Logarithmusfunktion

1. Technik des Differenzierens

Bestimme die ersten beiden Ableitungen ohne Taschenrechner

a) $y = f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

b) $y = f(x) = x^3 \cdot \ln(x^2 + \pi)$

2. Kurvendiskussion

Diskutiere die Kurve zu $y = f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

3. Kürzester Abstand

Welcher Punkt der Kurve $y = \ln(x)$ liegt am nächsten zur Geraden $y = 4x + 4$?

4. Schnittwinkel (Aus einer Prüfung)

Betrachte die Funktion $y = f(x) = \ln(t + 2x^2)$. (Dabei sei $t < 1$.)

a) Setze $t = \frac{1}{2}$. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet die Kurve die positive x -Achse?

b) Die Kurve soll die positive x -Achse im Winkel $\alpha = 60^\circ$ schneiden. Wie gross muss t sein und wo liegt dann der Schnittpunkt (mit der positiven x -Achse)?

7.3. Trigonometrische Funktionen

1. Technik des Differenzierens

Bestimme die erste Ableitung ohne Taschenrechner

a) $y = \tan(x)$

b) $y = 3 \cdot \sin(4x + 5)$

c) $y = (\sin(x^2) + \pi \cdot x)^4$

2. Extremalwertaufgabe (Aus einer Prüfung)

Betrachte ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkellänge 10 cm und Basiswinkel α .

a) Für welchen Winkel α wird die Dreiecksfläche maximal?

b) Das Dreieck rotiert um die Basis. Wie gross muss α sein, damit das Volumen des entstandenen Rotationskörpers maximal wird? Berechne auch dieses maximal mögliche Volumen.

