Folgen und Reihen

1. Reelle Zahlenfolgen

1.1. Explizite und rekursive Definition von Folgen

1. **Beispiele**
   Beschreibe (entdecke, charakterisiere) die Zahlenfolgen.
   Gibt es Gesetzmässigkeiten? Wie gehen die Folgen weiter?

   $(a_n) : 1, 4, 9, 16, 25, ...$ ....

   $(b_n) : 9, 18, 27, 36, 45, ...$ ....

   $(c_n) : 1, 2, 4, 8, 16, ...$ ....

   $(d_n) : 1, 2, 3, 4, 6, 12.$ ....

   $(e_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ ....

   $(f_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ....

   $(g_n) : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ ....

2. **Definition**
   Eine Folge (a_n) ist eine Vorschrift, die jedem Index $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet.

3. **Beispiele**
   Versuche, die betrachteten Folgen zu definieren. Die Definition einer Folge ist dann vollständig, wenn man jedes Folgenglied damit berechnen kann.
   Wenn man eine Möglichkeit gefunden hat, wie man - beispielsweise - das 30-te Folgenglied berechnen kann, dann ist die Definition der Folge gefunden.

   $(a_n) : 1, 4, 9, 16, 25, ...$ ....

   $(b_n) : 9, 18, 27, 36, 45, ...$ ....

   $(c_n) : 1, 2, 4, 8, 16, ...$ ....

   $(d_n) : 1, 2, 3, 4, 6, 12.$ ....

   $(e_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ ....

   $(f_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ....

   $(g_n) : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ ....

4. **Definition**

Eine Folge (a_n) heisst explizit definiert, wenn jedes Folgenglied a_n durch einen Ausdruck in der Variablen n definiert ist.
Eine Folge (a_n) heisst rekursiv definiert, wenn jedes Folgenglied a_n durch einen oder mehrere Vorgänger (d.h. a_{n-1}, a_{n-2}) definiert wird.
Zu einer rekursiven Definition gehören immer zwei Teile, nämlich die Rekursionsvorschrift (Wie kommt man von a_n zum nächsten Folgenglied a_{n+1}?) und ein Startwert (Verankerung). Der Startwert ist normalerweise a_1, kann aber auch a_0 sein.

5. **Musterbeispiele**

a) $a_n = n^2 - n$. Berechne die ersten 5 Folgenglieder.

b) Ebenso: $b_1 = 1$; $b_{n+1} = 2 \cdot b_n + 1$.

c) $c_1 = 1$; $c_{n+1} = n - c_n$. Wie gross ist das 7. Folgenglied dieser Folge (c_n)?

d) Wie gross ist das 24. Folgenglied der Folge, die mit $d_n = 3^n$ definiert ist?

Übung

Vergleiche die drei Folgen:

$a_n = \dfrac{10^n - 1}{3}$

$b_1 = 3$; $b_{n+1} = 10 \cdot b_n + 3$

$c_1 = 3$; $c_{n+1} = c_n + 3 \cdot 10^n$

6. **Von der expliziten zur rekursiven Definition**

Der Weg von der expliziten zur rekursiven Definition ist nicht besonders schwierig und technisch durchzuarbeiten.

a) $a_n = n^2 - n$. Wir finden eine rekursive Definition.

b) In gewissen Fällen geht es noch schneller: $d_n = 3^n$

7. **Von der rekursiven zur expliziten Definition, 1. Teil**

Bei gewissen Folgen kann man die explizite Definition erkennen.

a) Betrachte die obige Folge: $b_1 = 1$; $b_{n+1} = 2 \cdot b_n + 1$.

b) $e_1 = 1$; $e_{n+1} = e_n - \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$. Berechne einige Folgenglieder. Wie lautet wohl die explizite Definition?

8. **Von der rekursiven zur expliziten Definition, 2. Teil**
   Für den Weg von der rekursiven zur expliziten Definition benötigt man einen Ansatz, wenn die explizite Definition nicht direkt erkennbar ist.
   Beispiel:
   Man kennt die rekursive Definition: $f_1 = 1$; $f_{n+1} = f_n + n$. Die explizite Definition hat die Form $f_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$. Bestimme a, b und c.

Übung

Eine Folge ist rekursiv definiert durch $f_1 = 33$; $f_{n+1} = 10 - \dfrac{2}{3} \cdot f_n$.

a) Berechne f_2, f_3, f_4 und f_5.

b) Die explizite Definition hat die Form $f_n = a \cdot b^n + c$.
   Berechne a,b und c.

1.2. Arithmetische Folgen

1. **Beispiel**

   Gegeben ist die Folge $(a_n) : 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...$.
   Finde eine rekursive und eine explizite Definition.
   Für die explizite Definition kann man sich überlegen, wie man direkt vom ersten zum 15-ten (oder allgemein zum n-ten) Folgenglied gelangt.

2. **Definition**

   Gegeben sei eine Folge (a_n).
   Man definiert die Differenzenfolge $(d_n) : d_n = a_{n+1} - a_n$.
   Eine Folge, für welche die Differenzenfolge konstant ist (diese Konstante wird meist mit d bezeichnet), heisst arithmetische Folge (wir kürzen ab: AF).
   Die explizite Definition einer AF lautet: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
   Die rekursive Definition einer AF ist: $a_{n+1} = a_n + d$, bei vorgegebenem Wert für a_1

3. **Grundaufgaben**

   a) Von einer AF kennt man $a_1 = 10$ und $a_6 = 4$. Bestimme d. Wie gross ist a_3?

   b) Von einer AF kennt man $a_{10} = 10$ und $d = 4$. Wie gross ist a_1?

   c) Von einer AF kennt man $a_{10} = 10$ und $d = -3$. Wie gross ist a_3?

   d) Von einer AF kennt man $a_7 = 10$ und $a_{11} = -1$. Berechne a_1 und d.

   e) Wie viele der Zahlen der AF $1000, 997, 994, ...$ sind grösser als Null?

4. **Theoretische Zwischenbemerkung**
   Warum heisst die arithmetische Folge so?

Satz: ....

....

....

5. **Konstante Folge**
   Die Folge $3, 3, 3, 3, ...$ ist eine AF mit $d = 0$. Eine solche Folge heisst konstante Folge.

Übung

a) Von einer AF kennt man $a_3 = 7.3$ und $a_8 = 14.2$.
   Berechne a_{38}.

b) Wie viele Folgenglieder der AF $33.2, 32.9, 32.6, ...$
   sind grösser als 1?

1.3. Geometrische Folgen

1. **Beispiel**
   Gegeben ist die Folge $(g_n) : 2, 6, 18, 54, 162, ...$
   Finde eine rekursive und eine explizite Definition.

2. **Definition**
   Gegeben sei eine Folge (g_n). Definiere die Quotientenfolge $(q_n) : q_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$.
   Eine Folge, für welche die Quotientenfolge konstant ist (diese Konstante wird meist mit q bezeichnet), heisst geometrische Folge. Wir kürzen ab: GF.
   Die explizite Definition einer GF lautet: $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$.
   Die rekursive Definition einer GF ist: $g_{n+1} = q \cdot g_n$, bei vorgegebenem Wert für g_1.

3. **Sonderfälle**
   Damit quasi sinnlose Sonderfälle ausgeschlossen werden, gilt bei einer GF: $g_1 \neq 0$. Denn sonst hat man die konstante Folge $0, 0, 0, ...$ und bekommt spätestens bei der Berechnung von $q_1 = \frac{g_2}{g_1}$ Probleme.
   Aus dem gleichen Grund gilt für eine GF: $q \neq 0$
   Für $q = 1$ erhält man eine konstante Folge, beispielsweise $2, 2, 2, ...$
   Mathematisch interessant ist hingegen er Fall $q = -1$, beispielsweise für die Hoch- und Tiefpunkte einer nicht abklingenden Schwingung oder Welle.

4. **Erkennen von geometrischen Folgen**
   a) Ist $16, -8, 4, -2, ...$ der Anfang einer GF? Wenn ja, wie geht sie weiter?
   b) Löse ebenso für die Folge $0.9, 0.09, 0.009, 0.0009, ...$
   c) Ebenso: $1.2, 1.02, 1.002, 1.0002, ...$

5. **Grundaufgaben**

   a) Von einer GF kennt man $a_1 = 10$ und $q = 1.2$. Wie gross ist a_{30}?

   b) Von einer GF kennt man $a_{10} = 10$ und $q = -3$. Wie gross ist a_1?

   c) Von einer GF kennt man $a_1 = 10$ und $a_4 = 4$. Wie gross ist a_3?

   d) Von einer GF kennt man $a_7 = 10$ und $a_{10} = -1$. Berechne a_1 und q.

   e) Wie viele Folgenglieder der GF $100, 99, ...$ sind grösser als 1?

6. **Bemerkung**

   Die folgenden angewandten Beispiele sollen aufzeigen, in welchen Bereichen man es mehr oder weniger direkt mit geometrischen Folgen zu tun hat.
   Übrigens besteht auch ein Zusammenhang zwischen Exponentialfunktionen und geometrischen Folgen, jedenfalls so lange $q > 0$ ist. Und für $-1 < q < 0$ kann man eine abklingende Schwingung erkennen.

7. **Radioaktivität**

   Ein radioaktives Element verliert täglich 10% seiner Strahlung. In welcher Zeit sinkt die Strahlung auf einen Hundertstel des ursprünglich gemessenen Werts?
   In der Physik ist die Halbwertszeit wichtig. Das ist die Zeit, in der die Strahlung auf die Hälfte des Startwerts reduziert wird.

8. **Wertzunahme**

   Ein Beispiel aus der Wirtschaft: Eine Immobilie hat heute einen Wert von 1 Mio Fr. Angenommen, der Wert steige jedes Jahr um 6%: Wann ist der Wert dieser Immobilie auf 2 Mio Fr. angestiegen?

9. **Musik und GF**

   Von einer GF kennt man das erste Folgenglied: 440 Hz, und das 13. Folgenglied: 880 Hz. Wie gross ist das 8. Folgenglied?
   Die musikalische Bedeutung dieser Aufgabe ist u. a. die folgende: Eine reine Quint ist höher gestimmt als eine gleichmässig gestimmte.

10. **Vorsicht Falle!**
    Eine GF beginnt mit $10, -9, \ldots$. Wie viele Folgenglieder sind grösser als 0.01?

11. **Arithmetische und Geometrische Folge**
    Drei Zahlen a,b und c mit Summe 3 bilden in der Reihenfolge a, b, c eine GF, in der Reihenfolge b, a, c eine AF. Wie lauten die drei Zahlen?

Übung

Eine Bakterienkultur wächst exponentiell, d.h. die Messwerte zu Beginn jedes Tages bilden (bis auf Rundungseffekter oder Messfehler) eine GF.
Am Tag 5 der Messungen hat man 4328 Einheiten gemessen, am Tag 8 waren es 4939 Einheiten.

a) Wie gross war die prozentuale Zunahme pro Tag?

b) Wie viele Einheiten misst man am Tag 18 der Messungen?