2. Eigenschaften von Zahlenfolgen

2.1. Monotone Folgen

1. **Definition**

   Eine Folge heisst streng monoton wachsend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} > a_n$.
   (D.h. jedes Folgenglied ist grösser als sein Vorgänger. Man sagt auch streng monoton zunehmend.)
   Eine Folge heisst monoton wachsend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} \geq a_n$.
   (Jedes Folgenglied ist mindestens gleich gross wie sein Vorgänger. Man sagt auch monoton nichtabnehmend.)
   Eine Folge heisst streng monoton fallend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} < a_n$.
   (Man sagt auch streng monoton abnehmend.)
   Eine Folge heisst monoton fallend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} \leq a_n$.
   (Man sagt auch monoton nichtzunehmend.)

2. **Musterbeispiele**

   $(a_n) : 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ ....

   $(b_n) : 3, 6, 12, 24, 48, \ldots$ ....

   $(c_n) : -1, -2, -4, -8, -16, \ldots$ ....

   $(d_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ ....

   $(e_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ....

   $(f_n) : 2.2, 2.02, 2.002, 2.0002, \ldots$ ....

   $(g_n) : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ ....

   $(h_n) : 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, \ldots$ ....

   $(j_n) : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ....

3. **Definition**

   Eine Folge heisst alternierend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} \cdot a_n < 0$.
   (D.h. zwei benachbarte Folgenglieder haben stets verschiedene Vorzeichen oder “das Vorzeichen wechselt dauernd“).
   Die Eigenschaften “monoton“ und “alternierend“ schliessen sich gegenseitig aus. Eine monotone Folge ist nicht alternierend, eine alternierende nicht monoton. Es gibt aber Folgen, die weder monoton noch alternierend sind (siehe oben die Folge (h_n)).

Übung

a) Wann ist eine AF monoton, wann alternierend?

b) Wann ist eine GF monoton, wann alternierend?

2.2. Beschränkte Folgen

1. **Definition**

   Eine Folge heisst nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl t gibt, so dass für alle n gilt: $a_n \leq t$ (D.h. die Zahl t wird nicht überschritten.) Diese Zahl t heisst obere Grenze.
   Eine Folge heisst nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl u gibt, so dass für alle n gilt: $a_n \geq u$ (D.h. die Zahl u wird nicht unterschritten.) Diese Zahl u heisst untere Grenze.
   Von allen möglichen Grenzen t und u interessieren uns natürlich diejenigen, welche eine Folge möglichst gut eingrenzen. Also müssen t und u möglichst nahe beieinander liegen. Das bedeutet, dass t möglichst klein und u möglichst gross sein sollte.
   Die kleinste obere Grenze einer Folge heisst Supremum (Bezeichnung: sup)
   Die grösste untere Grenze einer Folge heisst Infimum (Bezeichnung: inf)
   Eine Folge, die ein Supremum und ein Infimum hat, heisst beschränkte Folge.

2. **Musterbeispiele**

   $(a_n) : 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ ....

   $(b_n) : 3, 6, 12, 24, 48, \ldots$ ....

   $(c_n) : -1, -2, -4, -8, -16, \ldots$ ....

   $(d_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ ....

   $(e_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ....

   $(f_n) : 2.2, 2.02, 2.002, 2.0002, \ldots$ ....

   $(g_n) : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ ....

   $(h_n) : 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, \ldots$ ....

   $(j_n) : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ....

3. **Bemerkungen**

   Die letzten Beispiele zeigen uns, dass das Supremum und das Infimum einer Folge angenommen werden können, aber nicht angenommen werden müssen.
   Wenn das Supremum angenommen wird, dann gibt es also (mindestens) ein grösstes Folgenglied. Dieses nennen wir Maximum (Bezeichnung: max)
   Wenn das Infimum angenommen wird, dann gibt es (mindestens) ein kleinstes Folgenglied. Dieses heisst Minimum (Bezeichnung: min)

4. **Folgerungen**

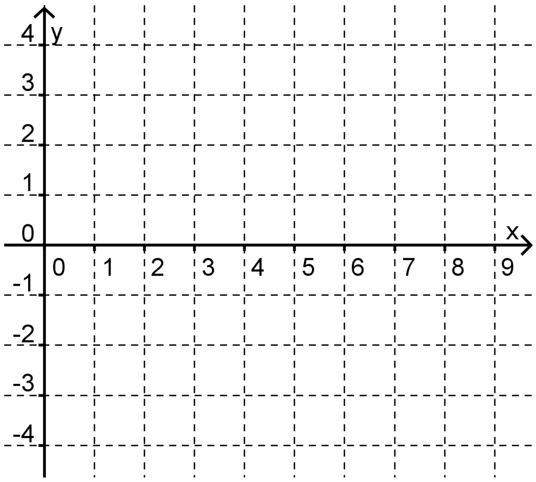
   Wenn eine Folge ein Maximum (also ein grösstes Folgenglied) hat, dann ist dieser Wert auch Supremum. Aus der Existenz des Supremums kann aber nicht unbedingt auf ein Maximum geschlossen werden. D.h. die Aussage Maximum ist stärker.
   Wenn eine Folge ein Minimum (also ein kleinstes Folgenglied) hat, dann ist dieser Wert auch Infimum. Aus der Existenz des Infimums kann aber nicht unbedingt auf ein Minimum geschlossen werden. D.h. die Aussage Minimum ist stärker.

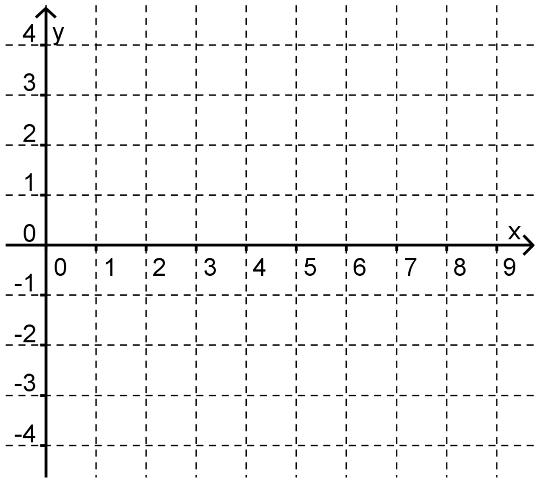
5. **Folgen aufzeichnen**

Zur Illustration der Eigenschaften einer Zahlenfolge kann man die Folge aufzeichnen, indem man in einem Koordinatensystem die Punkte $(n|a_n)$ einzeichnet.

a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{10}{5}, \frac{13}{6}, \ldots$

b) $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$





Übung

Einige Aufgaben zum Überlegen:

a) Wann hat eine GF ein Supremum/Infimum/Maximum/Minimum?
(Es sei $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ und $q \neq 1$, damit die unmöglichen und quasi sinnlosen Fälle ausgeschlossen sind.)

b) Gibt es eine Folge, die weder ein Supremum noch ein Infimum hat?

c) Gibt es eine Folge, die zwar sowohl Supremum als auch Infimum, aber weder Maximum noch Minimum hat?

2.3. Der Grenzwert einer Folge

1. **Anschauliche Version des Grenzwerts**

   Betrachte die drei Folgen:

   $(a_n) : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ ....

   $(b_n) : 3.3, 3.03, 3.003, 3.0003, \dots$ ....

   $(c_n) : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ....

   Alle drei Folgen nähern sich einer gewissen Zahl, d.h. mit zunehmendem Index n wird a_n immer in der Nähe von 1, b_n in der Nähe von 3 und c_n in der Nähe von 0 liegen. Diese Zahl nennt man Grenzwert der Folge. Der Grenzwert ist also diejenige Zahl, deren sich die Folgenglieder beliebig nähern.
   Man schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$, bzw. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = 3$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n) = 0$
   Wenn man so will, ist der Grenzwert das *unendlichste* Folgenglied. Ähnlich wie beim Supremum, welches nicht angenommen werden muss, muss auch der Grenzwert nicht angenommen werden. (Es ist sogar so, dass der Grenzwert nur in wenigen Fällen angenommen wird.) Wichtig dabei ist, dass sich die Folgenglieder *nicht mehr vom Grenzwert weg* bewegen. Beispielsweise hat die Folge $(d_n) : 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \cdots$ keinen Grenzwert, auch wenn unendlich viele Folgenglieder gleich Null sind.

2. **Musterbeispiele**

   $(a_n) : 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots$ ....

   $(b_n) : 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$ ....

   $(c_n) : 16, -8, 4, -2, 1, \dots$ ....

   $(d_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ....

   $(e_n) : 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots$ ....

   $(f_n) : 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ ....

3. **Definition**

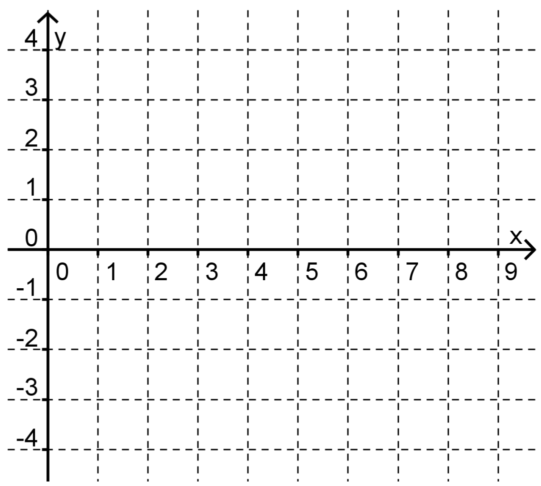
   Wenn eine Folge einen Grenzwert besitzt, dann sagt man, die Folge **konvergiere** gegen diesen Wert und die Folge heisst **konvergente Folge**.
   Eine Folge mit Grenzwert 0 heisst **Nullfolge**.

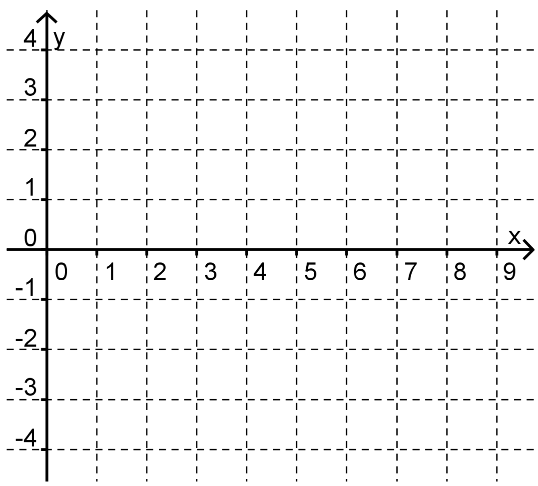
4. **Arithmetische und Geometrische Folgen**

   Wann hat eine AF einen Grenzwert? Und wann hat eine GF einen Grenzwert?

5. **Grenzwerte berechnen**
   a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ....
   b) $b_n = \dfrac{2n}{n+3}$ ....
   c) $c_n = \dfrac{n}{n^2-10}$ ....
   d) $d_n = \dfrac{3n^3-n}{2n^3-10}$ ....

6. **Das ε - Band**
   Wir zeichnen zwei Folgen auf:
   a) $(a_n): 4, 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, -1, -\frac{8}{7}, -\frac{5}{4}, \ldots$
   b) $(b_n): -1, 1, 2, 2.5, 2.75, 2.875, \ldots$





Bei beiden Folgen können wir nun ein ganz schmales, horizontales Band legen, so dass (vielleicht mit Ausnahme der ersten paar) alle aufgezeichneten Punkte der Folgenglieder in diesem Band liegen. Das Band ist nach rechts unbegrenzt. Es hat die Höhe von $2 \cdot \varepsilon$ und wir nennen es demzufolge ε-Band.
Wenn wir nun dieses ε-Band beliebig schmal machen können, dann konvergiert die Folge und die mittlere Höhe dieses ε-Bandes ist dann der Grenzwert.

7. **Mathematisch genaue Formulierung des Grenzwerts**
   Es sei $\varepsilon > 0$, d.h. ε ist eine beliebige (für uns wichtig: beliebig kleine) positive Zahl. Ein offenes Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, also alle Zahlen, welche sich von a höchstens um ε unterscheiden, heisst ε-Umgebung von a. (Das sind die Zahlen, die in der Nähe von a liegen.)
   Eine Zahl a heisst nun Grenzwert einer Folge (a_n), wenn für jede (für uns wichtig: jede noch so beliebig kleine) ε-Umgebung von a ab einem bestimmten Index n alle Folgenglieder innerhalb dieser ε-Umgebung liegen.

8. **Folgen diskutieren**

   Bestimme alle Eigenschaften der jeweiligen Folge.
   Gedankenstütze: Monotonie/alternierend, Grenzen (inf=? usw.),
   Grenzwert (lim = ?).

   a) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

   b) $b_n = \frac{2n}{n+3}$

Übung

Von einer Folge kennt man die ersten Folgenglieder:

$\frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{25}{8}, \ldots$

Finde eine explizite Definition und diskutiere die Folge.