3. Teilsummenfolgen, Reihen

3.1. Teilsummenfolgen von AF

1. **Beispiel**

   Wie gross ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100: $1+2+3+...+100 = ?$ Eine Anekdote besagt, dass damals ein Lehrer sich eine ruhige Lektion gönnen wollte und diese Aufgabe den Schülern erteilte. Der Lehrer hatte Pech, weil in dieser Klasse ein begabter Schüler (der spätere grosse Mathematiker Gauss) sass. Noch bevor der Lehrer es sich an seinem Pult gemütlich machen konnte, kam der kleine Gauss nach vorne und zeigte dem Lehrer das Ergebnis.

2. **Teilsummenfolge einer AF**

   Gegeben ist die AF $1, 4, 7, 10, 13, \dots$.
   Wie gross ist die Summe der ersten 20 Folgenglieder?

3. **Die allgemeine Formel für Teilsummen einer AF**

   Gegeben sei eine AF $(a_n) : a_1, a_2, a_3, \dots a_n$. Bezeichne mit $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ die Summe der ersten n Folgenglieder. Man sagt dafür auch Teilsumme.
   Wie gross ist die Teilsumme s_n?
   Auf Grund des obigen Beispiels vermuten wir: ....

4. **Grundaufgaben**

a) Eine AF aus 16 Folgengliedern beginnt mit 4 und endet mit 7. Wie gross ist die Summe aller Folgenglieder?

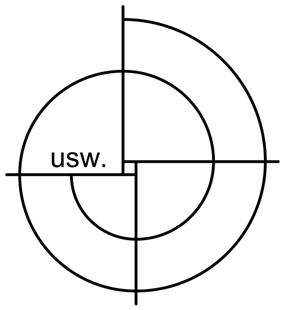
b) Wie gross ist die Summe $5 + 9 + 13 + 17 + ... + 101$?

c) Von einer AF kennt man $a_1 = 3$ und $s_5 = 20$. Wie gross ist a_5?

d) Eine AF beginnt mit 50, 46, ... Wie viele Folgenglieder muss man summieren, damit man 240 erhält?

5. **Anwendung**

In der Figur rechts hat das kleine Quadrat in der Mitte Seitenlänge 2 cm und der grösste Radius ist $r_1 = 25$ cm. Die Spirale endet, wenn der letzte Viertelskreis auf eine Seite des kleinen Quadrates in der Mitte trifft.
Wie lang ist die Spirale?
(Die Skizze ist *nicht* massstäblich.)



3.2. Teilsummenfolgen von GF

1. **Beispiel**
   Eine GF beginnt mit $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$
   Gesucht ist die Summe s_{10} der ersten 10 Folgenglieder.
   Diese Aufgabe ist ohne Formel zunächst nicht direkt lösbar.

2. **Formel und Beweis**
   Gegeben sei eine GF $(a_n) : a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.
   Wie gross ist die Teilsumme s_n?
   Die Formel lautet $s_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

   Beweis

3. **Beispiele**
   Jetzt lösen wir das Einstiegsbeispiel und eine Variation dazu:

   a) Eine GF beginnt mit $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$
   Gesucht ist die Summe s_{10} der ersten 10 Folgenglieder.

   b) Eine GF beginnt mit $48, 24, 12, 6, 3, \ldots$
   Gesucht ist die Summe s_{10} der ersten 10 Folgenglieder.

4. **Grundaufgaben**

   a) Gegeben sei die GF $2, 3, \ldots$. Wie gross ist die Teilsumme s_8 ?

   b) Eine GF aus 13 Folgengliedern beginnt mit 1000 und endet mit 2000.
   Wie gross ist die Summe ihrer Folgenglieder?

   c) Von einer GF kennt man $a_1 = 9$ und $s_3 = 7$. Wie gross sind a_2 und a_3?

   d) Wie viele Folgenglieder der GF $1, 1.1, \ldots$ muss man summieren, um mehr als 1000 zu erhalten?

5. **Welche Werte kann s_n annehmen?**

   a) Eine GF beginnt mit $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Wie gross ist s_8?

   b) Wie viele Folgenglieder der GF $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ muss man aufsummieren, um mehr als 1 zu erhalten?

   c) Vermutung:
   Mit den Teilsummen der GF $162, 54, 18, 6, 2, \ldots$ kann man jede obere Grenze überschreiten. Wahr oder falsch?

   d) Eine GF beginnt mit $1, -0.9, \ldots$. Hat die Teilsummenfolge (s_n) einen Grenzwert?

   e) Gegeben ist die GF $1, 1.1, 1.21, \ldots$. Hat hier (s_n) einen Grenzwert?

6. **Geometrische Reihe**

Gegeben sei eine GF: $a_1, a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_1 \cdot q^2, \ldots$.

7. **Grundaufgaben**

a) Eine GF beginnt mit $a_1 = 1$. Weiter kennt man die Summe aller Folgenglieder $s = 5$. Wie gross ist q?

b) Von einer GF mit Quotienten $q = 0.3$ kennt man $s = 10$. Wie gross ist a_1?

c) Von einer GF kennt man die Summe der ersten 3 Folgenglieder: 26 und die Summe aller restlichen Folgenglieder: 1. Wie lauten die ersten 3 Folgenglieder?

d) Eine GF beginnt mit $100, -99, \ldots$ Wie gross ist die Summe aller Folgenglieder?

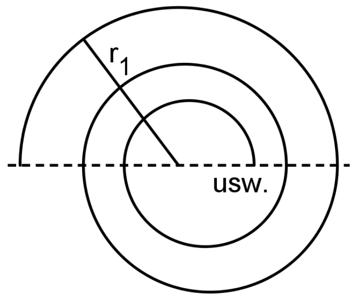
8. **Anwendung**

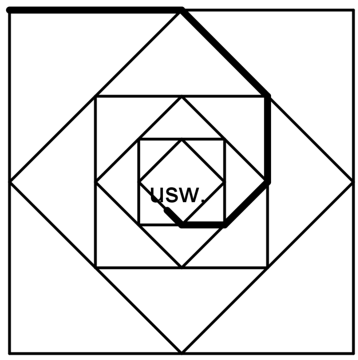
Die Spirale in der Figur unten links bestehe aus 10 Halbkreisen, deren Radien eine GF bilden. Die ersten Radien betragen $r_1 = 25\,\text{cm}$ und $r_2 = 20\,\text{cm}$.

a) Wie lang wird die Spirale?

b) Ein Käfer wandert entlang der Spirale (von aussen nach innen). Auf welchem Halbkreis befindet er sich, wenn er genau 3 Meter zurückgelegt hat?

c) Wie lang kann diese Spirale (theoretisch) werden, wenn man sie aus unendlich vielen Halbkreisen zusammensetzt?



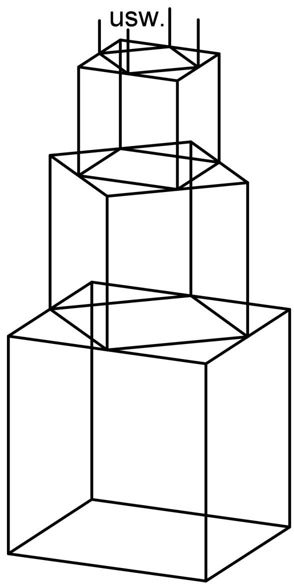


9. **Quadratmuster**

In der Figur oben rechts hat das grösste Quadrat Seitenlänge 10 cm. Die Mittelpunkte jedes Quadrates sind Eckpunkte des nächsten Quadrates. Wie lang ist der markierte Weg?
(Der Weg sei aus unendlich vielen, immer kleineren, Teilstrecken zusammengesetzt)

10. **Würfelturm**

Betrachte den nebenstehenden, aus unendlich vielen Würfelchen zusammengesetzten Turm. Die Figur zeigt die Situation als Drahtgestell. Die Kantenmittelpunkte in der Deckfläche jedes Würfelchens sind gleichzeitig Eckpunkte der Grundfläche des darüberliegenden Würfelchens. Die Kantenlänge des untersten Würfels beträgt 10 cm.



a) Wie hoch wird der Turm?

b) Berechne das Volumen und die (räumlich sichtbare) Oberfläche des Turms?

c) Der Turm wird in 30 cm Höhe parallel zur Bodenfläche abgeschnitten. Der wievielte Würfel (von unten gezählt) wird entzweigeschnitten?

d) Zum Schluss verändern wir die Grösse des Turms: Wie gross darf die Kantenlänge des untersten Würfels werden, damit der Turm nicht höher wird als einen Meter?

Übung

Unterscheide genau:

a) Wie viele Folgenglieder der GF $3, 5, \ldots$ muss man summieren, um mehr als 1000 zu erhalten?

b) Wie viele Folgenglieder der AF $3, 5, \ldots$ muss man summieren, um mehr als 1000 zu erhalten?

c) $27 + 32 + 37 + 42 + 47 + ... + 277 = ?$

3.3. Summierbarkeit

1. **Theoretische Bemerkungen**
   a) Die Teilsummenfolge (s_n) einer beliebigen Folge (a_n) kann man immer bilden. Es ist nur so, dass es je nach Folge schwierig sein kann, für s_n eine Formel zu finden. Wir haben genau zwei Formeln kennen gelernt, nämlich für die Teilsummen von AF und GF.
   b) Aus dem vorigen Kapitel ist bekannt, dass man die Folgenglieder einer GF ins Unendliche aufsummieren kann, wenn $|q| < 1$, weil dann der Grenzwert der Teilsummenfolge $s = \lim_{n\to\infty}(s_n)$ existiert.
   c) Wir verallgemeinern: Eine (beliebige) Folge (a_n) heisst summierbar, wenn der Grenzwert der Teilsummenfolge (s_n) existiert. Eine GF ist also summierbar, wenn $|q| < 1$ ist. Oder anders formuliert: Eine GF ist summierbar, wenn sie Nullfolge ist.

2. **Behauptung und Begründung**

   Damit eine Folge summierbar sein kann, muss sie Nullfolge sein.

   Entsprechend gilt auch: Wenn eine Folge *nicht* Nullfolge ist, dann kann sie nicht summierbar sein.
   Nicht klar ist aber, ob jede Nullfolge summierbar ist.

3. **Die Harmonische Folge**

   Die Harmonische Folge ist definiert durch $h_n = \dfrac{1}{n}$.
   Es handelt sich offensichtlich um eine Nullfolge. $\lim_{n\to\infty}(h_n) = 0$.
   Allerdings geht die Folge so langsam gegen Null, dass die Teilsummenfolge keine Grenzwert hat. Man kann also durch Aufsummieren jede obere Grenze überschreiten.