Mathematik-Formelsammlung

Oliver Riesen, KSZ

Grundlagen

Quadratische Gleichung

$ax^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Diskriminante: $D=b^2-4ac$

Logarithmen

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \qquad \ln x = \log_e x \qquad e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 2.71828...$

Planimetrie

Rechtwinkliges Dreieck	Satz des Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$ Satz des Euklid: $a^2=pc$ und $b^2=qc$ Höhensatz: $h^2=pq$
Gleichseitiges Dreieck	$A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$
Quadrat	$A=a^2 \qquad d=a\sqrt{2}$
Trapez	$A=\dfrac{a+c}{2}h=mh$
Kreis	$u=2\pi r \qquad A=\pi r^2$
Bogen und Sektor	$\dfrac{\alpha}{360°}=\dfrac{b}{2\pi r}=\dfrac{A}{\pi r^2}$

Stereometrie

Würfel	$V=a^3 \qquad A=6a^2$
Quader	$V=abc$ $A=2(ab+ac+bc)$
Prisma	$V=Gh$
Pyramide	$V=\dfrac{1}{3}Gh$
Zylinder	$V=Gh=\pi r^2 h$ $A=2\pi r^2+2\pi rh$ $M=2\pi rh$
Kegel	$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ $M=\pi rs$
Kugel	$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3 \qquad A=4\pi r^2$

Trigonometrie

Rechtwinkliges Dreieck	$\sin \to \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos \to \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan \to \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
Beliebige Winkel	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
Beliebiges Dreieck	Sinus-Satz: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2r$ (r = Umkreisradius) Cosinus-Satz: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ und zyklisch vertauscht.

Analysis

Folgen und Reihen

Arithmetische Folge	$a_{n+1}-a_n=d \qquad a_n=a_1+(n-1)\cdot d \qquad s_n=n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2}$
Geometrische Folge	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q \qquad a_n=a_1\cdot q^{n-1} \qquad s_n=a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} \qquad \lim_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a_1}{1-q}$ (wenn $\lvert q\rvert<1$)

Differentialrechnung

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Konstanter Faktor: $[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x)$

Summen: $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$

Kettenregel: $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Produktregel: $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Quotientenregel: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Integralrechnung

Konstanter Faktor: $\int c\cdot f(x)dx=c\cdot\int f(x)dx$

Summen: $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

Partielle Integration: $\int(f'(x)\cdot g(x))dx=f(x)\cdot g(x)-\int(f(x)\cdot g'(x))dx$

Integration durch Substitution: $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int f(u)du, \quad u=g(x)$

Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, wobei $F'(x)=f(x)$

Rotationskörper: $V=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}(f(x))^2dx$ bei Rotation um die x-Achse

Bogenlänge: $b=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

Vektorgeometrie

Vektoren

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ Norm $\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\gamma)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Es gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

Vektorprodukt: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=-\vec{b}\times\vec{a}$

Es gilt: $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$ und $\vec{a},\vec{b},\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Ebene Vektorgeometrie (analytische Geometrie)

Abstand der Punkte $P(p_1 \mid p_2)$ und $Q(q_1 \mid q_2)$: $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$

Kanton Zug

Geradengleichungen:

Parametergleichung:	Koordinatengleichung:	Normalform:	Achsenabschnittsform:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$	$ax + by + c = 0$	$y = m \cdot x + v$	$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$

Steigung und Steigungswinkel: $m = \tan(\alpha) = \frac{r_2}{r_1}$

Zwischenwinkel ε zweier Geraden mit Steigungen m_1 und m_2: $\tan(\varepsilon) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Senkrecht stehende Geraden mit Steigungen m_1 und m_2: $(\varepsilon = 90°) \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Kreis mit Zentrum $M(m_1 \mid m_2)$ und Radius r: $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$

Vektorgeometrie im Raum

Koordinaten eines Punktes P, Ortsvektor zum Punkt P: $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \vec{r}_P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Parametergleichung einer Geraden:	Parametergleichung einer Ebene:	Koordinatengleichung einer Ebene: Hesse'sche Normalform:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$	$\varepsilon: \ ax + by + cz + d = 0$ $\varepsilon: \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Abstand zweier Punkte P und Q:	Winkel α zwischen einer Geraden und einer Ebene:	Winkel ε zwischen zwei Ebenen:
$\lVert \overrightarrow{PQ} \rVert = \lVert \vec{r}_Q - \vec{r}_P \rVert$	$\cos(\beta) = \frac{\vec{r}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon}{\lVert \vec{r}_g \rVert \cdot \lVert \vec{n}_\varepsilon \rVert}$ und $\alpha = 90° - \beta$	$\cos(\varepsilon) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lVert \vec{n}_1 \rVert \cdot \lVert \vec{n}_2 \rVert}$

Kugel mit Zentrum $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ und Radius r: $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2$

Stochastik

Kombinatorik

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
geordnete Stichproben	$\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten	n^k Möglichkeiten
ungeordnete Stichproben	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ Möglichkeiten	$\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten
Permutationen	n! Möglichkeiten	$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$ Möglichkeiten

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

A, B sind unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$

Zufallsgrössen

Erwartungswert: $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p(x_i)$ Varianz: $V(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E(X))^2 \cdot p(x_i) = \sigma^2$

Binomialverteilung (Ziehen mit Zurücklegen)

n Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit p. $P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $\mu = n \cdot p$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Hypergeometrische Verteilung (Ziehen ohne Zurücklegen)

m Kugeln, davon w weisse. n Ziehungen. $P_n^{*}(k) = \frac{\binom{w}{k} \cdot \binom{m-w}{n-k}}{\binom{m}{n}}$

Normalverteilte Zufallsgrösse mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ:

$$P(X \le x) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{wobei } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Tabelle der standardisierten Normalverteilung

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Kanton Zug