Integralrechnung

1. Stammfunktionen

1.1. Berechnen von Stammfunktionen

1. **Aufgabenstellung, 1. Form**
   Von einer Funktion $y = f(x)$ kennt man die erste Ableitung $f'(x) = 6x^3 + 5$.
   Bestimme die Funktionsgleichung $y = f(x)$. (*Kurvendiskussion rückwärts gedacht.*)

2. **Aufgabenstellung, 2. Form**
   Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$.
   Gesucht ist eine Funktion $F(x)$, deren erste Ableitung $F'(x) = f(x)$ ist.

3. **Definition**
   Gegeben ist eine Funktion $y = f(x)$. Die Funktion $F(x)$, für die $F'(x) = f(x)$ gilt, heisst **Stammfunktion von** $f(x)$ oder **unbestimmtes Integral von** $f(x)$.
   Schreibweise: $F(x) = \int f(x)\, dx$

   Bemerkung: Das Integralzeichen ist - historisch gesehen - ein stilisiertes S. Weshalb dem so ist, sehen wir später. Das dx zeigt uns für den Moment an, dass wir nach x integrieren müssen - und dass alle anderen Variablen Parameter sind.

4. **Stammfunktionen von Potenzen**
   a) $f'(x) = x^5$. Bestimme $f(x) =$ ....
   b) $\int x^n\, dx =$ ....
   c) $f'(x) = x$. Bestimme $f(x) =$? Oder $\int x\, dx =$ ....
   d) $\int \sqrt{x}\, dx =$ ....
   e) $\displaystyle\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx =$ ....

5. **Spezielle Funktionen**
   a) $\int \mathrm{e}^x\, dx =$ ....
   b) $\int \sin(x)\, dx =$ ....
   c) $\int \cos(x)\, dx =$ ....

6. **Musterbeispiele**

a) $f'(x) = x^5 - 3x + \pi$. Bestimme $f(x)$

b) $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^3 - \frac{1}{4}x^2$. Bestimme $F(x)$

c) $\int \left(10x^4 - \frac{t}{2}x^3\right) dx$

d) $\int \left(4\sqrt[4]{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{10}{x}\right) dx$

e) $\int \frac{5x-8}{x^2}\, dx$

f) $f''(x) = 3x - 2$. Bestimme $f(x)$

g) Zeige, dass $\int (4x+2) \cdot \mathrm{e}^x \, dx = (4x-2) \cdot \mathrm{e}^x + c$

Freiwillige Übungen

a) $\int \left(\frac{x^5}{6} + \frac{6}{x^5}\right) dx$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt{3}}{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3x}\right) dx$

c) $\int \frac{2x^2 + x + 2}{x^2}\, dx$

d) Zeige, dass $\int (1 + \ln(x))\, dx = x \cdot \ln(x) + c$

1.2. Anfangsbedingungen

1. **Beispiel**

   Wenn man eine Stammfunktion bestimmt, dann ist die nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt, d.h. unter einer Stammfunktion versteht man eigentlich eine ganze Kurven*schar*.
   Wenn nun zusätzlich eine Anfangsbedingung gegeben ist, dann wir aus der Kurvenschar eine einzelne Funktion ausgewählt.
   Betrachte das Beispiel $y' = f'(x) = 2x^2 + 1$ mit der Anfangsbedingung $f(3) = 2$.

2. **Praktisches Beispiel**

   Von einer Funktion ist $y'' = f''(x) = -10$ gegeben.
   Ferner kennt man $f'(0) = \frac{1}{2}$ und $f(0) = 2$.
   Wie lautet die Funktionsgleichung $y = f(x)$?

   Praktische Bedeutung? ....

   ....

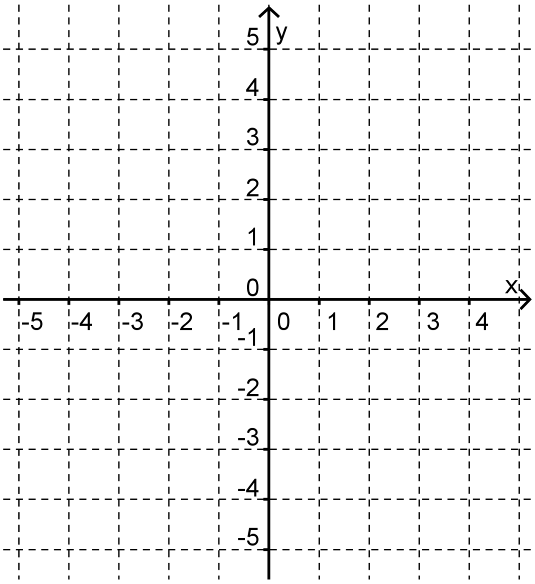
Übung

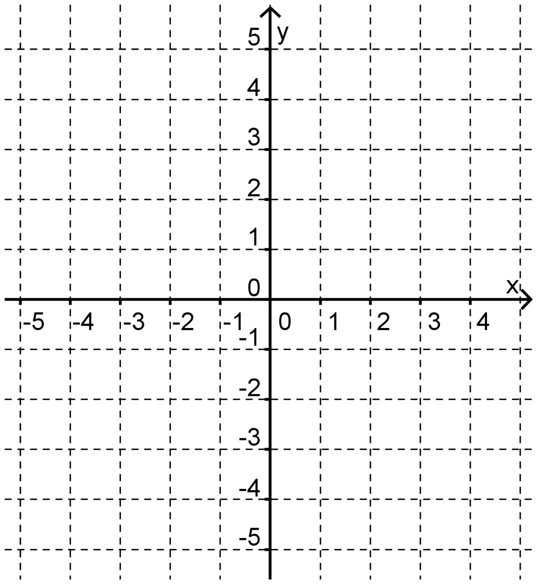
$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{x^2}$ und $f(2) = 3$.
Bestimme $f(x)$.

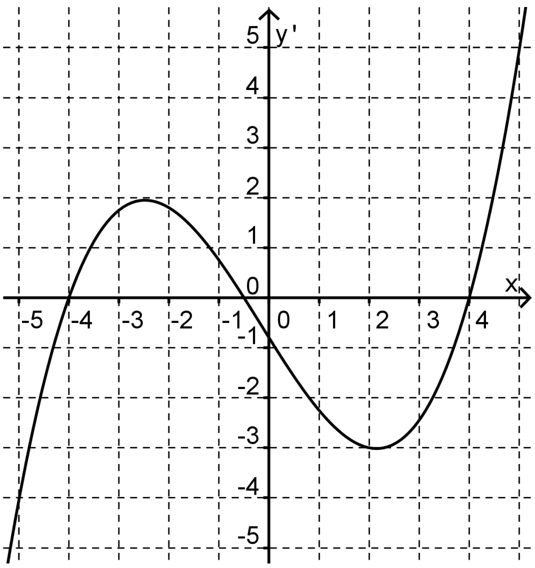
1.3. Grafisches Bestimmen von Stammfunktionen

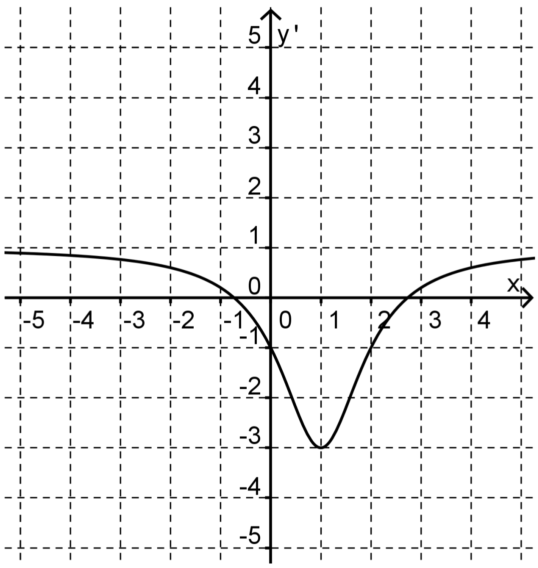
1. **Beispiele**

   Bestimme zu den dargestellten Ableitungen eine Stammfunktion.









Übung

Zeichne selber passende Koordinatensysteme und bestimme grafisch eine Stammfunktion.