2. Flächenberechnungen

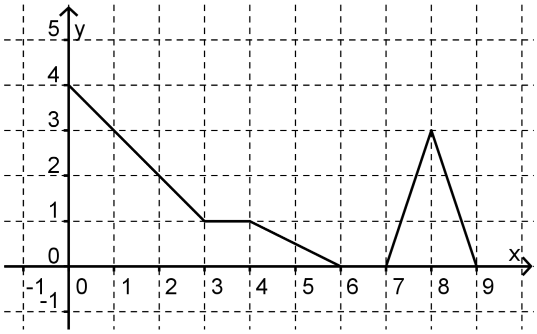
2.1. Die Flächenfunktion

1. **Flächenfunktion**

   Zeichne die Strecke zwischen den Punkten $(0\,|\,3)$ und $(6\,|\,0)$ und bestimme grafisch die zugehörige Flächenfunktion.

2. **Flächenfunktion**

   Zeichne in ein geeignet gewähltes Koordinatensystem die Flächenfunktion zu diesem Funktionsgraphen.



2.2. Historische und Theoretische Bemerkungen

1. **Notationen**

   Erkläre den Unterschied zwischen $\sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x$ und $\int_a^b f(x)\,dx$

2.3. Bestimmte Integrale

1. **Notationen**

   Schreibe mit vollständiger Notation aus

   a) $\int_2^5 3x^2\,dx =$

   b) $\int_1^4 5x\,dx =$

2. **Technik des Integrierens**

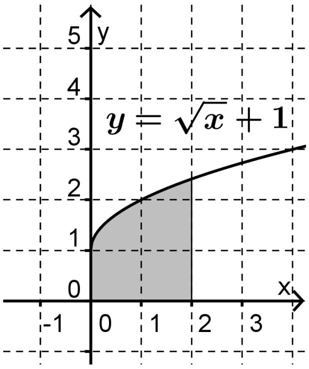
   Löse mit exakten Werten und ohne Taschenrechner.

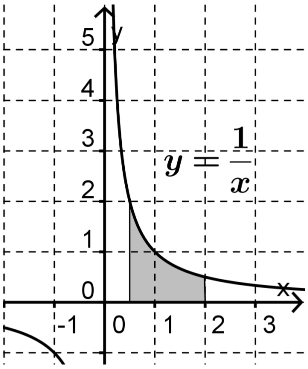
   a) $\int_1^3 \frac{3-\sqrt[3]{x}+3x}{x^3}\,dx =$

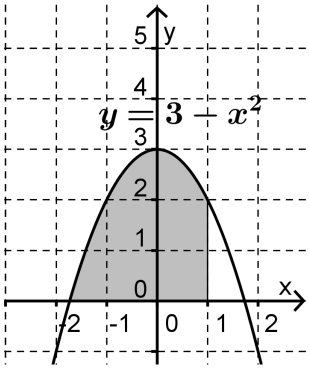
   b) $\int_1^2 \left(2x+\frac{2}{x}\right)dx =$

3. **Flächen**

   Berechne diese Flächen ohne Taschenrechnereinsatz.







4. **Interpretation**

   Berechne $\int_0^9 \left(2 - \sqrt{x}\right) dx$ und interpretiere das Ergebnis.

5. **Fläche zwischen zwei Kurven**

   a) Berechne die von den Kurven $y = f_1(x) = 6 - x$ und $y = f_2(x) = \dfrac{5}{x}$ eingeschlossene Fläche.

   b) Berechne den Inhalt der von den beiden Kurven $y = f(x) = x^3 + 12$ und $y = g(x) = 2x^2 + 11x$ vollständig umschlossenen Fläche.

6. **Flächenverhältnis**

   In welchem Verhältnis teilt die Gerade $y = x + 3$ die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = 9 - x^2$ liegende Fläche?

7. **Flächenberechnung (Aus einer Prüfung)**

   Gegeben ist $y = f(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x$ (mit zugehöriger Funktionskurve).

   a) Berechne die von der Funktionskurve und der x-Achse vollständig umschlossene endliche Fläche.

   b) Die im I. Quadranten unterhalb der Funktionskurve liegende Fläche wird durch $y = 12 - 4x$ in zwei Teilflächen unterteilt. Berechne das Verhältnis dieser beiden Teilflächen mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen.

8. **Parameter gesucht**

   Die Kurve zu $y = f(x) = a \cdot x^2 - x^3$ soll mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 4 einschliessen.
   Wie gross ist a?

9. **Parameter gesucht**

   Die im I. Quadranten unterhalb der Parabel $y = t \cdot x - x^2$ liegende Fläche wird durch die Parabel $y = t \cdot x^2$ in zwei Teilflächen unterteilt.
   Für welchen Wert von $t > 0$ wird die linke Teilfläche doppelt so gross wie die rechte?
   Hinweis: Berechne zunächst die beiden Teilflächen, abhängig von t.

10. **Beweisaufgabe**

Beweise die folgende Aussage:
Für jede positive Zahl a gilt: Die Kurve $y = x^3$ halbiert die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = a \cdot x - x^3$ liegende Fläche.

11. **Fläche halbieren**

Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f(x) = 6 - \mathrm{e}^x$ liegende Fläche soll durch einen Schnitt parallel zur x-Achse halbiert werden.
In welcher Höhe hat dieser Schnitt zu erfolgen?

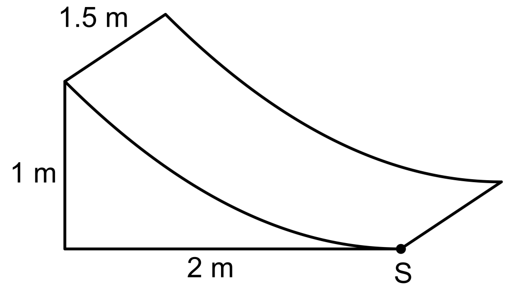
2.4. Angewandte Aufgaben

1. **Kurventangente (Aus einer Prüfung)**

Gegeben ist die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{10}$ liegende Fläche F. Diese Fläche F wird durch die Kurventangente im Punkt $P(\,1\,|\,\dots)$ in mehrere Teilflächen zerschnitten.
Welcher Anteil von F liegt oberhalb der Kurventangente?

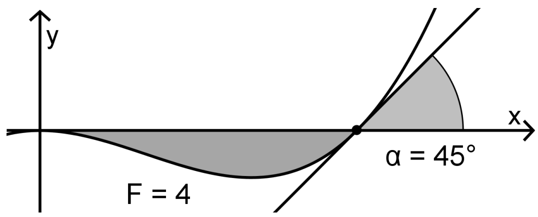
2. **Rampe**

In einem Fun-Park steht eine Rampe wie in der Figur skizziert. Die Kurve ist ein Parabelbogen, dessen Scheitel sich im Punkt S befindet.
Welches Volumen hat die Rampe?



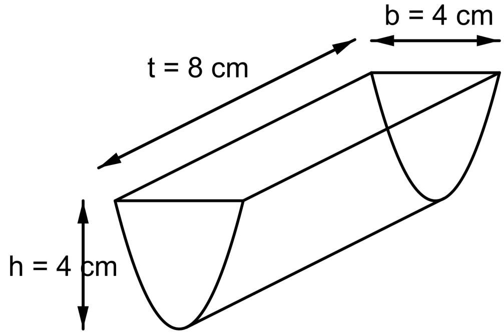
3. **Funktion gesucht**

Die dargestellte Funktion hat die Form $y = f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$.
Die markierte Fläche beträgt $F = 4$ und der eingezeichnete Winkel beträgt $\alpha = 45°$.
Berechne a und b.



4. **Wanne**

Die Frontfläche der dargestellten Wanne ist ein durch einen Parabelbogen begrenzte Fläche, die Deckfläche ein Rechteck.
Bestimme das Volumen dieser Wanne.



2.5. Uneigentliche Integrale

1. **Flächenberechnungen**

   Die im I. Quadranten unterhalb von $y = f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ liegende Fläche wird links begrenzt durch die Gerade $x = 3$ und reicht ins Unendliche.
   Wie gross ist diese Fläche?

2. **Fläche**

   Betrachte die Funktion $y = f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ im I. Quadranten.

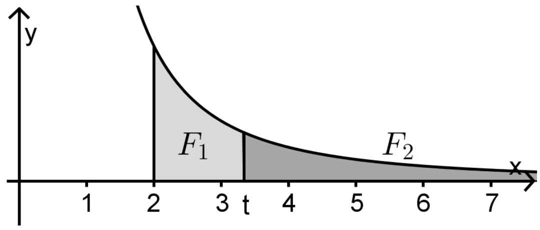
   a) Wie gross ist die Fläche, wenn man sie nach rechts durch $x = 1000$ begrenzt?

   b) Wie gross wird die Fläche, wenn sie ins Unendliche reicht?

3. **Fläche unterteilen**

   (Siehe die nicht massstäbliche Skizze.)

   Die unterhalb von $y = f(x) = \dfrac{8}{x^4}$ liegende, ins Unendliche reichende Fläche soll im Verhältnis $F_1 : F_2 = 2 : 3$ geteilt werden. Bestimme t.



2.6. Volumen von Rotationskörpern

1. **Rotationskörper**

   Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des so entstehenden Körpers.

   a) $y = f(x) = 4 - \sqrt{x}$

   b) $y = f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$

2. **Liegender Becher**

   Das im I. Quadranten liegende Stück der Kurve $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ rotiert um die x-Achse und bildet so die Form eines liegenden Bechers.
   An welcher Stelle $x = t$ muss man rechts parallel zur y-Achse abschneiden, damit der Rotationskörper das Volumen $V = 1$ erhält?

3. **Rotationskörper (Aus einer Prüfung)**

   Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = 4 - t \cdot \sqrt{x}$ liegende Fläche rotiert um die x-Achse und beschreibt so einen Rotationskörper.

   a) Setze $t = 2$. Beschreibe und skizziere den so beschriebenen Rotationskörper und berechne sein Volumen.

   b) Für welchen Wert von $t > 0$ hat der Rotationskörper ein Volumen von $V = 24\pi$?

4. **Zwei Funktionen (Aus einer Prüfung)**

   Gegeben sind die Funktionen $y = f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x^3$ und $y = g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

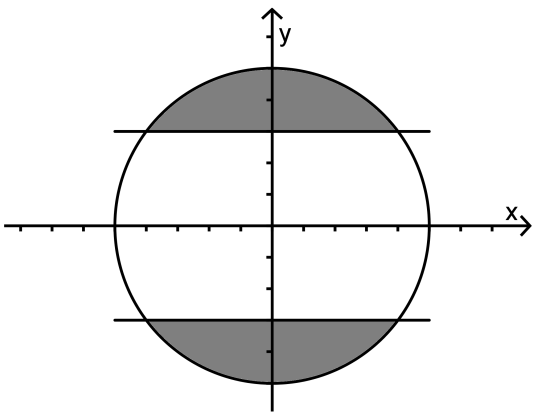
   a) Die im I. Quadranten unterhalb von $y = f(x)$ liegende Fläche wird durch die Kurve zu $y = g(x)$ in zwei Teilflächen unterteilt. Berechne das Verhältnis dieser beiden Teilflächen.

   b) Die von den beiden Kurven vollständig umschlossenene Fläche rotiert um die x-Achse.
   Berechne das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

5. **Zwei spezielle Rotationskörper (Aus einer Prüfung)**

   a) Die im I. Quadranten zwischen den Kurven $y = f_1(x) = \dfrac{2}{x+3}$ und $y = f_2(x) = \dfrac{5}{x+5}$ liegende Fläche rotiert um die x-Achse.
   Berechne das Volumen dieses Körpers.

   b) Eine Holzkugel vom Radius 5 mm wird mit einem Bohrer von 6 mm Durchmesser zentral durchbohrt.
   Wie gross ist das Volumen des übrig bleibenden Körpers?



6. **Beweisaufgabe**

   Man beweise die Volumenformel für den Kegelstumpf, indem man eine geeignet gewählte Fläche um die x-Achse rotieren lässt.