3. Integrationstechniken

3.1. Partielle Integration

1. **Grundsituation**
   a) $\int \sqrt{x} \cdot \ln(x)\, dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(|x|) - \frac{4}{9} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
   Hinweis: Setze $f'(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(x)$.
   b) $x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c$
   c) $\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^x\, dx = 1$
   Hinweis: Setze $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = x$.
   d) $4 \cdot \ln(2) - \frac{15}{16}$

2. **Zweimal partiell integrieren**
   $\int x^2 \cdot \mathrm{e}^x\, dx = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot \mathrm{e}^x + c$

3. **Übung**
   $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \frac{1}{2}$
   Hinweis: Setze $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln(x)$. Dann entsteht rechts das gesuchte Integral nochmals. Löse nach dem Integral auf. Die Stammfunktion ist dann $\frac{(\ln(x))^2}{2}$. Setze zuletzt die Grenzen ein.

4. **Flächenberechnung**
   0.944

5. **Technik des Integrierens (Aus einer Prüfung)**
   a) $\int_0^3 (1 - x^2)\, dx = x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^3 = 3 - \frac{27}{3} = -6.$
   Die unter der x-Achse liegende Fläche ist 6 grösser als die oberhalb liegende.
   b) Setze $f'(x) = x^3$, $g(x) = \ln(x)$
   Dann ist $\int_1^{\mathrm{e}} (x^3 \cdot \ln(x))\, dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln(x)\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x}\, dx =$
   $= \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln(x)\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{4} \cdot x^3\, dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln(x) - \frac{1}{16} \cdot x^4\Big|_1^{\mathrm{e}} =$
   $= \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^4 \cdot \ln(e) - \frac{1}{16}\mathrm{e}^4 - \left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16}\mathrm{e} + \frac{1}{16} = \frac{3 \cdot \mathrm{e}^4 + 1}{16}$

6. **Fläche (Aus einer Prüfung)**
   $t = 1.505$
   Das Integral ist $\int_0^t (t-x) \cdot \mathrm{e}^x \, dx$. Setze $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = t - x$.
   Dann ist das Integral gleich $(t-x) \cdot \mathrm{e}^x \Big|_0^t - \int_0^t -\mathrm{e}^x \, dx = (t-x) \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \Big|_0^t =$
   $= (0 + \mathrm{e}^t) - (t+1) = \mathrm{e}^t - t - 1$

3.2. Integration durch Substitution

1. **Grundsituation**
   a) $\int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \, dx = \mathrm{e}^{x^2} + c$
   b) $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \, dx = \frac{94}{15} \cdot \sqrt{2} - \frac{56}{15}$.
   Hinweis: Substituiere $u = x - 1$ und schreibe alles nach u um. Dabei ist $x^2 = (u+1)^2$ und dann muss man den Bruch zerlegen.

2. **Fläche**
   a) $-2 \cdot (t - x^2)^{\frac{3}{2}}$
   b) $t = 2^{\frac{2}{3}}$

3. **Tangens**
   $\int \tan(x) \, dx = -\ln(|\cos(x)|) + c$
   $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ umschreiben, $u(x) = \cos(x)$