3. Integrationstechniken

3.1. Partielle Integration

1. **Beispiel**

   Berechne $\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = ?$

   Mit den bekannten Regeln ist diese Aufgabe nicht lösbar. Weil ein Produkt nicht faktorweise differenziert werden darf, darf ein Produkt auch nicht faktorweise integriert werden.

2. **Herleitung**

   Wir leiten eine Formel her, mit der es anschliessend möglich ist, ein Produkt zu integrieren. Die Formel heisst partielle Integration (oder selten auch Produktintegration).

3. **Partielle Integration**

   $\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$

   oder in äusserst kurzer Form geschrieben: $\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$

4. **Musterbeispiel**

   $\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx =$

   Ein Faktor ist nun $f'(x)$, der andere $g(x)$.

5. **Übung**
$\int x \cdot \sin(x)\, dx =$

6. **Korrekte Wahl der Faktoren**
$\int x^2 \cdot \ln(x)\, dx =$

7. **Korrekte Wahl der Faktoren**
$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx =$

8. **LAPTE**

Bei der Methode der partiellen Integration muss man so vorgehen, dass das neu entstehende Integral einfacher wird. Wenn man die Funktionen klassiert nach LAPTE (Logarithmen, Algebraische/Polynome/Potenzen, Trigonometrische und Exponentialfunktionen), dann muss man die im Ausdruck LAPTE weiter links liegende Funktion ableiten, die weiter rechts liegende integrieren.

9. **Die Logarithmusfunktion integrieren**

$\int \ln(x)\,dx =$

Freiwillige Übungen für Schnellrechner

a) $\int x \cdot \sin(x)\,dx =$ (Grundsituation)

b) $\int (2x-3) \cdot \mathrm{e}^x\,dx =$ (Grundsituation)

c) $\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x)\,dx =$

d) $\int x^2 \cdot \mathrm{e}^x\,dx =$

10. **Bestimmtes Integral**
$$\int_0^4 x \cdot \mathrm{e}^x \, dx =$$

11. **Übung**
$$\int_1^4 \sqrt{x} \cdot \ln(x) \, dx =$$

Lernkontrolle
$$\int_1^{\mathrm{e}} 4x \cdot \mathrm{e}^x \, dx =$$
Die folgende Aufgabe stammt aus einer früheren Maturprüfung:
$$\int_1^8 (x-4) \cdot \ln(x) \, dx =$$

12. **Flächenberechnung**

Die Funktionskurve zu $y = f(x) = (x - 3) \cdot \mathrm{e}^x$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechne dessen Inhalt.

Übung

Berechne die von $f(x) = (x^2 - 7x + 12) \cdot \ln(x)$ und der x-Achse umschlossene Fläche.

3.2. Integration durch Substitution

1. **Bemerkung**

   Wie im vorherigen Kapitel gesehen, ist die Methode der partiellen Integration quasi die Umkehrung der Produktregel.
   Die zweite Integrationstechnik, die wir behandeln - Integrieren durch Substitution - ist quasi die Umkehrung der Kettenregel.

2. **Repetition Ableiten**

   Bestimme die Ableitung der Funktionen:

   a) $f(x) = (x^3 + 5)^6$. Dann ist $f'(x) =$ ....

   b) $f(x) = \sin(2x + 1)$. Dann ist $f'(x) =$ ....

   c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+5}$. Dann ist $f'(x) =$ ....

3. **Integration durch Substitution**

   Aus $f(u(x))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ folgern wir: $\int f'(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = f(u(x))$.

4. **Musterbeispiel I**

   $\int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\, dx =$

5. **Musterbeispiel II**

$\int 10 \cdot \sin(5x - 3)\, dx =$

6. **Musterbeispiel III**

$\int x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 1}\, dx =$

7. **Musterbeispiel IV**

$\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx =$

8. **Technik des Integrierens**

Wann erfolgt ein Integrationsvorgang mit partiellem Integrieren, wann ist die Substitutionsregel angezeigt? Das scheint manchmal nicht von vornherein klar.
Wenn eine *innere Funktion* vorkommt und man die innere Ableitung *sieht*, dann ist normalerweise die Substitution richtig; wenn man ein Produkt von zwei Faktoren hat, die man einzeln direkt integrieren bzw. ableiten kann, dann ist das Verfahren der partiellen Integration angezeigt.

9. **Bestimmtes Integral**

$\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\, dx =$

Lernkontrolle

$\int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx =$

10. **Integrieren ist eine Kunst**

Betrachte die vier auf den ersten Blick relativ ähnlich aussehenden Integrale:

$\int 2x^2 \cdot \mathrm{e}^{x}\, dx$ $\int 2 \cdot \mathrm{e}^{x^2}\, dx$ $\int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\, dx$ $\int 2x^3 \cdot \mathrm{e}^{x^2}\, dx$