3. Integrationstechniken

3.1. Partielle Integration

1. **Grundsituation**

   a) $\int \sqrt{x} \cdot \ln(x)\, dx =$

   b) $\int x \cdot \cos(x)\, dx =$

   c) $\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^x\, dx =$

   d) $\int_1^2 x^3 \cdot \ln(x)\, dx =$

2. **Zweimal partiell integrieren**

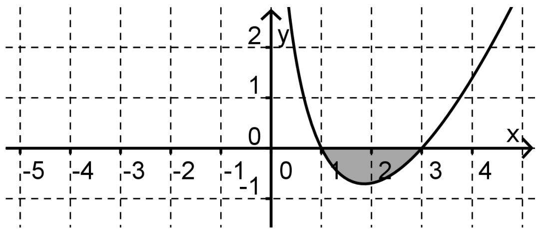
   $\int x^2 \cdot \mathrm{e}^x\, dx =$

3. **Übung**

   $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\, dx =$

4. **Flächenberechnung**

   Berechne die von der Funktionskurve $y = f(x) = (x-3) \cdot \ln(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche.
   (Siehe die Skizze nebenan.)



5. **Technik des Integrierens (Aus einer Prüfung)**

   Löse diese Aufgabe ohne Taschenrechner

   a) Zeige: $\int_0^3 (1-x^2)\, dx = -6$ und erkläre in ein bis zwei Sätzen die Bedeutung dieses Ergebnisses. Eine Figur könnte nützlich sein.

   b) Zeige, dass $\int_1^{\mathrm{e}} (x^3 \cdot \ln(x))\, dx = \frac{3 \cdot \mathrm{e}^4 + 1}{16}$

6. **Fläche (Aus einer Prüfung)**

   Betrachte die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = (t-x) \cdot \mathrm{e}^x$ liegende Fläche. Für welchen Wert von $t > 0$ hat diese Fläche Inhalt 2?
   Löse das vorkommende Integral ohne Taschenrechner.

3.2. Integration durch Substitution

1. **Grundsituation**

   a) $\int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \, dx =$

   b) $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \, dx =$

2. **Fläche**

   Gegeben ist $y = f(x) = 6x \cdot \sqrt{t - x^2}$.

   a) Berechne die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche.

   b) Für welchen Wert von $t > 0$ beträgt diese Fläche 4?

   Hinweis: Mit Einsatz von CAS-Taschenrechnern kann diese Aufgabe auch ohne Stubstitutionsmethode gelöst werden.

3. **Tangens**

   Berechne $\int \tan(x) \, dx =$

   Hinweis: Man muss $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ umschreiben und dann $u(x) = \cos(x)$ substituieren.