3. Ungeordnete Stichproben

3.1. Aufgaben vergleichen

1. **Auftrag**

   Lies die sieben nachstehenden Aufgaben durch. Vergleiche die Aufgaben untereinander. Du sollst sie vorerst nicht lösen, sondern nur vergleichen.
   Erkennst du Verwandtschaften? Gibt es Aufgaben, die mathematisch gleichwertig sind?

2. **Sieben Aufgaben**

   Aufgabe A
   Wie viele Wörter (Buchstabensequenzen) aus 11 Buchstaben X und 4 Buchstaben Y gibt es? (Beispielsweise XYXXXXXYYXXYXXXX)

   Aufgabe B
   Eine Klasse hat 15 Schüler(-innen). Weil sie mit dem Mathelehrer Streit haben, gehen vier davon aufs Rektorat. Auf wie viele Arten kann man diese Delegation aus 4 Leuten bilden?

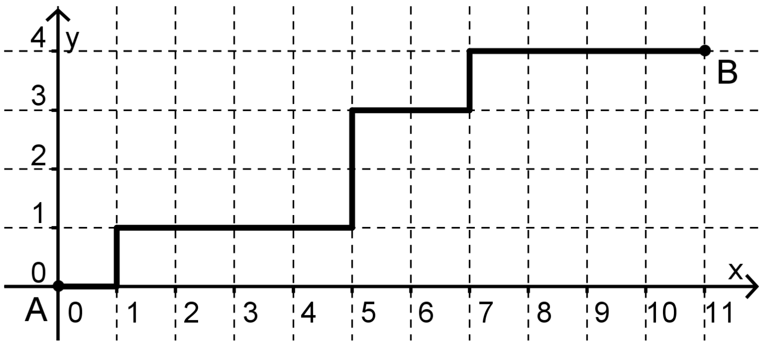
   Aufgabe C
   Ein Weinhändler stellt in einem Schaukasten in einer Reihe 15 Flaschen Wein aus, nämlich 4 Sorten Weisswein und 11 Sorten Rotwein. Wie viele Möglichkeiten hat er, die Flaschen anzuordnen?

   Aufgabe D
   Man hat 15 Kisten in einer Reihe. Man verteilt 11 identisch aussehende (nicht unterscheidbare) Kugeln auf diese Kisten, wobei keine Kiste mehrfach belegt werden darf. Auf wie viele Arten kann die Verteilung erfolgen?

   Aufgabe E
   In einem Behälter befinden sich 15 Zettel. Je einer ist mit A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N resp. O beschriftet. Man zieht 4 Zettel mit einem Griff. Wie viele Ziehungen kann man unterscheiden?

   Aufgabe F
   In einem fernen Land spielt man nicht Lotto *6 aus 49*, sondern Lotto *4 aus 15*. Wie viele verschiedene Lottoziehungen sind theoretisch möglich?

   Aufgabe G
   Wie viele kürzeste Wege von $A\ (0\,|\,0)$ nach $B\ (11\,|\,4)$ auf den Gitterlinien gibt es? (Ein Beispiel ist eingezeichnet.)



3.2. Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung

1. **Musterbeispiele**

   a) Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 identische Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln in verschiedene Kisten gelegt werden sollen?

   b) In einem Behälter befinden sich 8 Zettel mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G resp. H. Man zieht 5 Zettel mit einem Griff heraus. Wie viele verschiedene Versuchsergebnisse sind so möglich?

   Diese Aufgaben sind Beispiele ungeordneter Stichproben ohne Wiederholung. Man überlege sich, was im Aufgabentext jeweils *ungeordnet* bzw. *ohne Wiederholung* bedeutet.

2. **Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung**

   Gegeben ist eine Menge mit n Elementen. Man zieht k Elemente mit einem Griff.

   Begründung:

3. **Bemerkungen**

Die ungeordneten Stichproben bilden die wichtigste Situation der Kombinatorik.

a) Das Zahlenlotto (z.B. 6 aus 49, je nach Land) ist eine ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung. Man zieht die Zahlen zwar nacheinander, aber es kommt schliesslich nicht auf die Ziehungsreihenfolge an. Auch wenn für die Zeitungsnotiz der gezogenen Zahlen diese aufsteigend geordnet werden, spielt die Reihenfolge keine Rolle.

b) Bei Wählerumfragen kommt es auch nicht auf die Reihenfolge der Befragungen an. Weil wohl jede Person nur einmal befragt wird, gibt es auch keine Wiederholung.

c) Wenn in einem Verein, einer Schulklasse etc. ein Vorstand, eine Arbeitsgruppe etc. auszuwählen ist, dann ist das auch eine ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung.

4. **Definition**

5. **Übung inkl. Taschenrechnerbedienung**

a) $\binom{12}{7} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

b) $\binom{17}{4} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) $\binom{32}{13} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

6. **Überlegungsaufgaben**

a) $\binom{22}{1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

b) $\binom{22}{22} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) $\binom{22}{23} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

d) $\binom{22}{0} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

e) $\binom{22}{5} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

7. **Übungen**

a) Auf wie viele Arten kann man aus 12 Personen einen Dreierausschuss wählen?

b) In einem Parlament sitzen 12 Vertreter der Partei A, 15 der Partei B und 8 der Partei C.
Es soll eine 9-er-Kommission nach dem Verteilschlüssel $A : B : C = 3 : 4 : 2$ gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

8. **Prost!**

a) 25 Personen stossen an einer Party an. Wie oft klingen die Gläser, wenn jeder mit jedem anstösst?

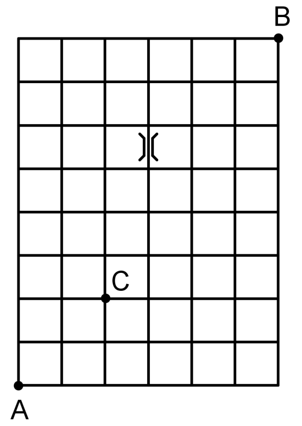
b) Wie viele Personen befinden sich in einer Gesellschaft, wenn beim Anstossen 253 Mal die Gläser klingen?

Gutscheine

An einem Wettbewerb werden 15 Gutscheine zu 100 Fr. und 25 Gutscheine zu 50 Fr. verlost. Auf wie viele verschiedene Arten kann die Verlosung ausgehen, wenn 100 Personen an der Verlosung teilnehmen? (Jede Person erhält höchstens einen Gutschein.)

9. **Gitternetzlinien**

Im nebenstehenden Strassennetz will Mr X von A nach B gelangen. Natürlich wählt er einen der kürzest möglichen Wege und geht stets nach rechts oder nach oben (Richtung Osten bzw. nach Norden).



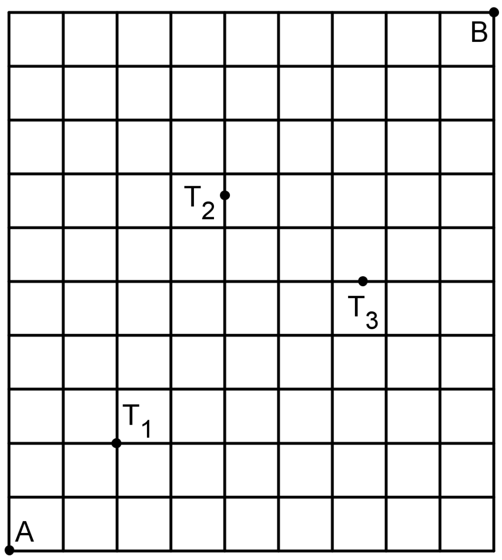
a) Wie viele Wege von A nach B gibt es insgesamt?

b) Mr X soll in C noch einen Kollegen abholen. Wie viele Möglichkeiten (also von A über C nach B) gibt es?

c) Wie viele kürzeste Verbindungen stehen ihm zur Verfügung, wenn er unterwegs in C einen Kollegen abholen muss, aber die markierte Strasse wegen einer Sperrung nicht benützen darf?

Aus einer Prüfung

Mr X fährt auf einem der möglichen kürzesten Wege von A nach B. Unterwegs hat es drei Tankstellen, die mit T_1, T_2 resp. T_3 bezeichnet sind. Wie viele Wege stehen Mr X zur Verfügung, wenn er bei mindestens einer Tankstelle vorbeikommen muss?



3.3. Permutationen mit Wiederholung

1. **Beispiel**

   Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 9 Kugeln, nämlich 4 weisse, 3 blaue und 2 rote. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn in jede Kiste genau eine Kugel gelegt werden soll?
   Es gibt zwei Lösungsansätze:

   Begründung (am Beispiel), weshalb die beiden Ansätze auf das gleiche Ergebnis führen:

2. **Permutationen mit Wiederholung**

   Eine Buchstabensequenz bestehe aus n Zeichen. Davon sind n_1 Zeichen A_1, n_2 Zeichen A_2, ..., n_r Zeichen A_r. Wie viele Möglichkeiten hat man, die Zeichen anzuordnen?

3. **Übungen**

a) Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben von MISSISSIPPI anordnen? (Diese Aufgabe kann man als MISSISSIPPI-Problem sogar googeln.)

b) In einer Buchhandlung stehen folgende Wörterbücher in einer Reihe: 3 Exemplare Deutsch-Englisch, 5 Ex. Deutsch-Französisch, 2 Ex. Deutsch-Italienisch und 4 Ex. Deutsch-Spanisch. Auf wie viele Arten kann man die Bücher anordnen, wenn gleiche Bücher als ununterscheidbar gelten?

c) Die ENTGEGENGETRETENEN ist vermutlich eines der längsten deutschen Wörter mit nur 5 verschiedenen Buchstaben. Auf wie viele verschiedene Arten kann man diese 18 Buchstaben anordnen?

Kleine Knacknuss

Aus genau den Ziffern 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3 sollen 7-stellige Zahlen gebildet werden, wobei keine Null an erster Stelle stehen darf.
Wie viele verschiedene Zahlen sind möglich?

3.4. Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung

1. **Bemerkung**

   Die kombinatorische Formel für ungeordnete Stichproben mit Wiederholung ist einerseits mühsam herzuleiten und hat andererseits kaum praktische Bedeutung. Für Interessierte ist in diesem Kapitel eine Herleitung notiert, dass es $\binom{n+k-1}{k}$ ungeordnete Stichproben mit Wiederholung von k aus n Elementen gibt. Am Schluss folgen ein paar Beispiele.

2. **Musterbeispiel**

   Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 identische Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln beliebig verteilt werden dürfen?
   Man überlege der Reihe nach: Wenn die Kugeln unterscheidbar wären, dann hätte man eine geordnete Stichprobe mit Wiederholung. Dafür gibt es 9^6 Möglichkeiten.
   Nun müssen wir die Ordnung zerstören. Naheliegender Gedanke: Dividiere durch 6!.
   Dass das hier aber falsch ist, sieht man aus zwei Gründen:
   Erstens (rechnerisch) $\frac{9^6}{6!}$ ergibt 738.11 und das ist keine natürliche Zahl.
   Zweitens (anschaulich): Wenn sich die 6 Kugeln alle in einer einzigen Kiste (z.B. in der Kiste ganz links) befinden, dann ist das auch bei unterscheidbaren Kugeln nur eine einzige Möglichkeit (und eine einzige Möglichkeit kann man nicht durch 6! dividieren).
   Folglich müssen wir auf eine andere Art vorgehen.

3. **Von der Verteilung zur Sequenz**

   Gegeben sind also $n = 9$ Kisten und $k = 6$ Kugeln. Ein Beispiel einer Verteilung zeigt die Figur. Wir werden nun die möglichen Verteilungen beschreiben. Die Kugeln stellen wir als Kreise dar und die Kisten trennen wir durch Striche (in der Figur punktiert eingezeichnet).

   Bei $n = 9$ Kisten hat man aber nur $n - 1 = 8$ Striche zu setzen, weil durch 8 Striche 9 Plätze (inkl. zwei links und rechts aussen für die äussersten Kisten) festgelegt sind. Wir erhalten also für die in der Figur dargestellte Verteilung die folgende Sequenz aus 8 Strichen und 6 Kreisen: ○| ○ ○|||| ○ ||| ○ ○. Dabei können wir uns die Kisten wegdenken.
   Entscheidend ist nun, dass jeder Verteilung der Kugeln auf die Kisten genau einer Sequenz aus Strichen und Kreisen entspricht (und umgekehrt natürlich auch).
   Der Verteilung *Je 2 Kugeln in der 3., 4. und 7. Kiste* entspricht somit die Sequenz || ○ ○| ○ ○||| ○ ○||.
   Wenn der Übergang von der Verteilung zur Sequenz klar ist, müssten die folgenden Beispiele zur Illustration genügen:
   5 Kugeln in der 2. Kiste, eine Kugel in der 6. Kiste entspricht | ○ ○ ○ ○ ○ |||| ○ |||.
   Der Sequenz ||| ○ ○ ○ ||||| ○ ○○ entspricht *je drei Kugeln in der 4. resp. 9. Kiste.*
   Folglich ist die gesuchte Anzahl möglicher Verteilungen gleich gross wie die Anzahl der möglichen Sequenzen aus 8 Strichen und 6 Kreisen. Diese Anzahl ist aber bekannt: $\binom{14}{6}$. Wähle aus den 14 Zeichen die 6 Kreise aus.

4. **Die allgemeine Formel**

   Man hat n Kisten und verteilt k identische Kugeln beliebig. Dann entspricht jeder Verteilung eine Sequenz aus $n-1$ Strichen und k Kreisen. Das sind insgesamt $n+k-1$ Zeichen, aus denen man k (ungeordnet, ohne Wiederholung) auszuwählen hat.

   Folglich gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ ungeordnete Stichproben mit Wiederholung.

5. **Bemerkung**

   Von der Logik der Herleitung her müsste man eigentlich $\binom{n-1+k}{k}$ schreiben, denn die -1 gehört zu n und nicht zu k. Nur steht es in allen Formelsammlungen anders.

Übungen

a) Für die Wahl in ein Parlament mit 10 Sitzen bewerben sich 4 Parteien. (Es sei angenommen, dass jede Partei mit 10 Kandidaten zur Wahl antritt.) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Sitzverteilung auf die Parteien?

b) Ein Eishockey-Spiel endet 9:4. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Drittelsergebnisse? Beispielsweise 9:4 (2:1, 4:0, 3:3).