

2. Sphärische Trigonometrie

2.1. Einfache Abstandsberechnungen

1. Längenmeridiane

Wir nehmen für alle Berechnungen einen Erdradius von 6370 km.

- a) Die Hauptstädte Lima ($12^\circ 03' S$) und Washington ($38^\circ 54' N$) liegen ziemlich genau auf dem 77. westlichen Längenmeridian.
Berechne ihre Entfernung auf der Erdkugel.
- b) Die Städte Algier ($36^\circ 45' N, 3^\circ 03' E$) und Lille ($50^\circ 36' N, 3^\circ 03' E$) liegen auf dem gleichen Längenmeridian.
Berechne ihre Entfernung auf der Erdkugel.



2. Direkte Entfernung

Wir nehmen eine Kugel vom Radius 1 m. Die geradlinige Entfernung zweier Kugelpunkte betrage 0.6 m.

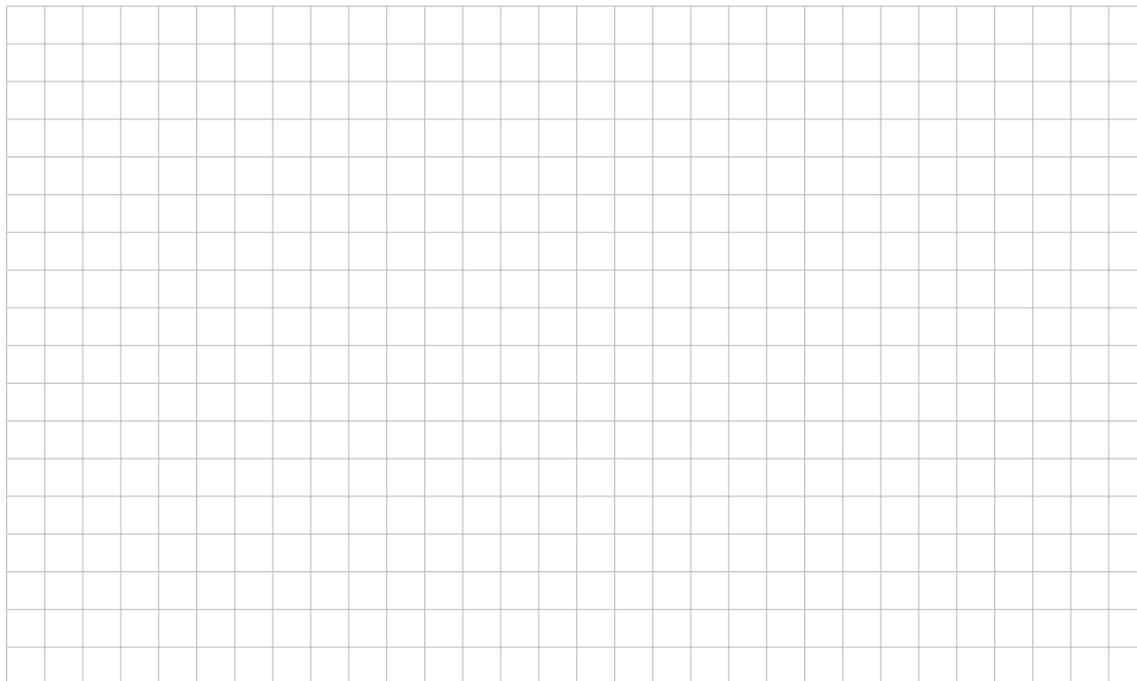
Wie gross ist die Entfernung dieser beiden Punkte auf der Kugeloberfläche?



3. Breitenkreise

Montreal ($45^\circ 30' \text{ N}$, $73^\circ 36' \text{ W}$) und Mailand ($45^\circ 30' \text{ N}$, $9^\circ 12' \text{ E}$) liegen auf dem gleichen Breitenkreis.

- Berechne ihre Entfernung auf dem Breitenkreis.
- Berechne ihre Entfernung auf dem Grosskreis.

**4. Seefahrt**

Wenn man von Hongkong ($22^\circ 15' \text{ N}$, $114^\circ 09' \text{ E}$) per Schiff auf dem Ozean genau südlich fährt, dann trifft man nach 3030 km Fahrt auf das Sultanat Brunei.

Berechne die geografischen Koordinaten von Brunei.



5. **Tunnel**

Kaliningrad/Königsberg ($20^\circ 30' E$) und Novosibirsk liegen auf dem 55° nördlichen Breitenkreis. Wenn man (theoretisch) einen geradlinigen Tunnel von Königsberg nach Novosibirsk bohren will, dann wird dieser Tunnel 3780 km lang.

Welches ist die geographische Länge von Novosibirsk?

**Lernkontrolle**

Betrachte die Städte Kairo ($30^\circ N, 31^\circ E$)
und New Orleans ($30^\circ N, 90^\circ W$).

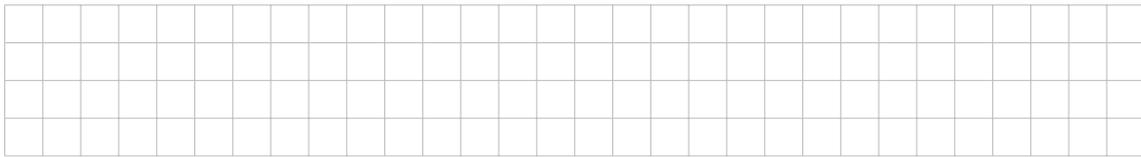
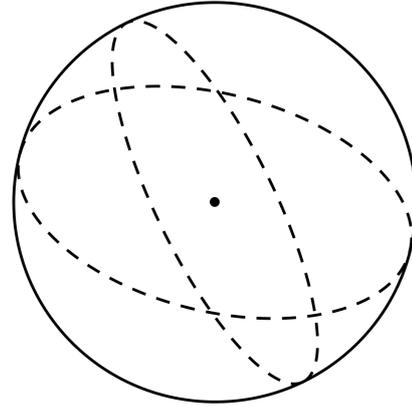
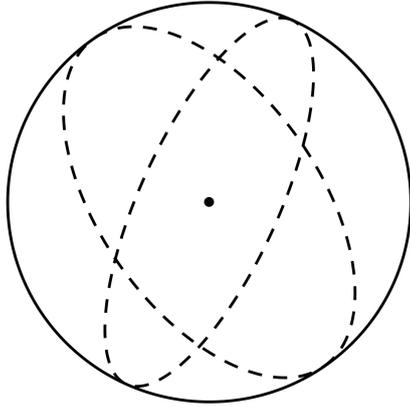
- Berechne ihre Entfernung auf dem Breitenkreis.
- Berechne ihre Entfernung auf dem Grosskreis.
- Wie lange ist (theoretisch) die geradlinige Verbindung durch die Erde hindurch und wie nahe kommt diese Verbindung zum Erdmittelpunkt?

2.2. Flächen

1. Kugelzweiecke

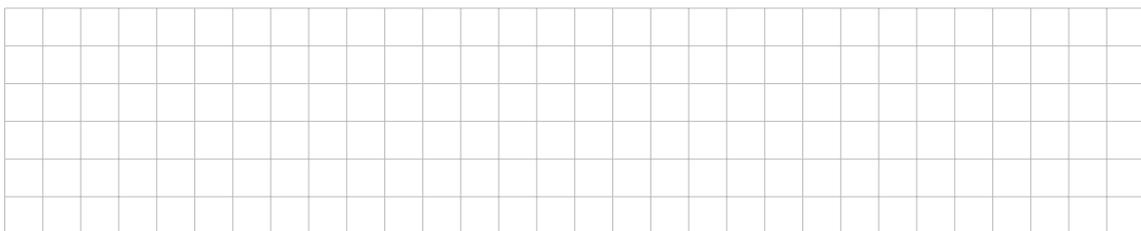
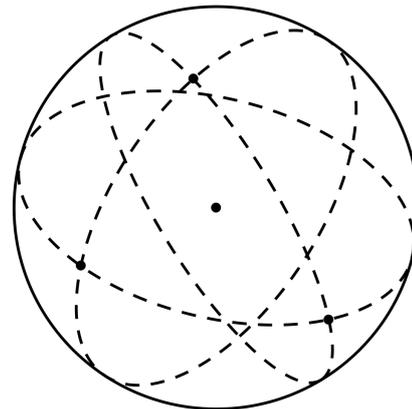
Durch zwei gegenüberliegende Punkte auf der Kugel gibt es unendlich viele Grosskreise. Deshalb kann man auf der Kugel auch Zweiecke haben.

(In der ebenen Geometrie geht das bekanntlich nicht, wenn man die Eckpunkte nur durch kürzeste Verbindungen miteinander verbinden darf.)



2. Kugeldreiecke

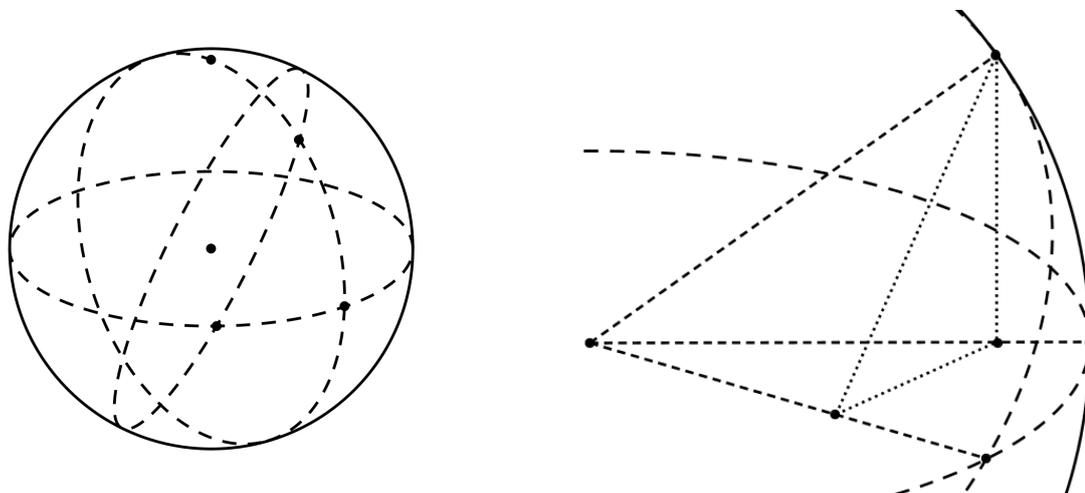
Wir berechnen der Fläche eines sphärischen Dreiecks.



2.3. Rechtwinklige Kugeldreiecke

1. Berechnungen

Wir betrachten ein Kugeldreieck mit einem rechten Winkel. Dazu legen wir eine Seite auf den Äquator. Eine andere Seite geht dann durch den Nordpol.



Wir vergrößern die Situation (Figur rechts) und ergänzen die Figur so, dass vier rechtwinklige Dreiecke entstehen.



2. Übungen

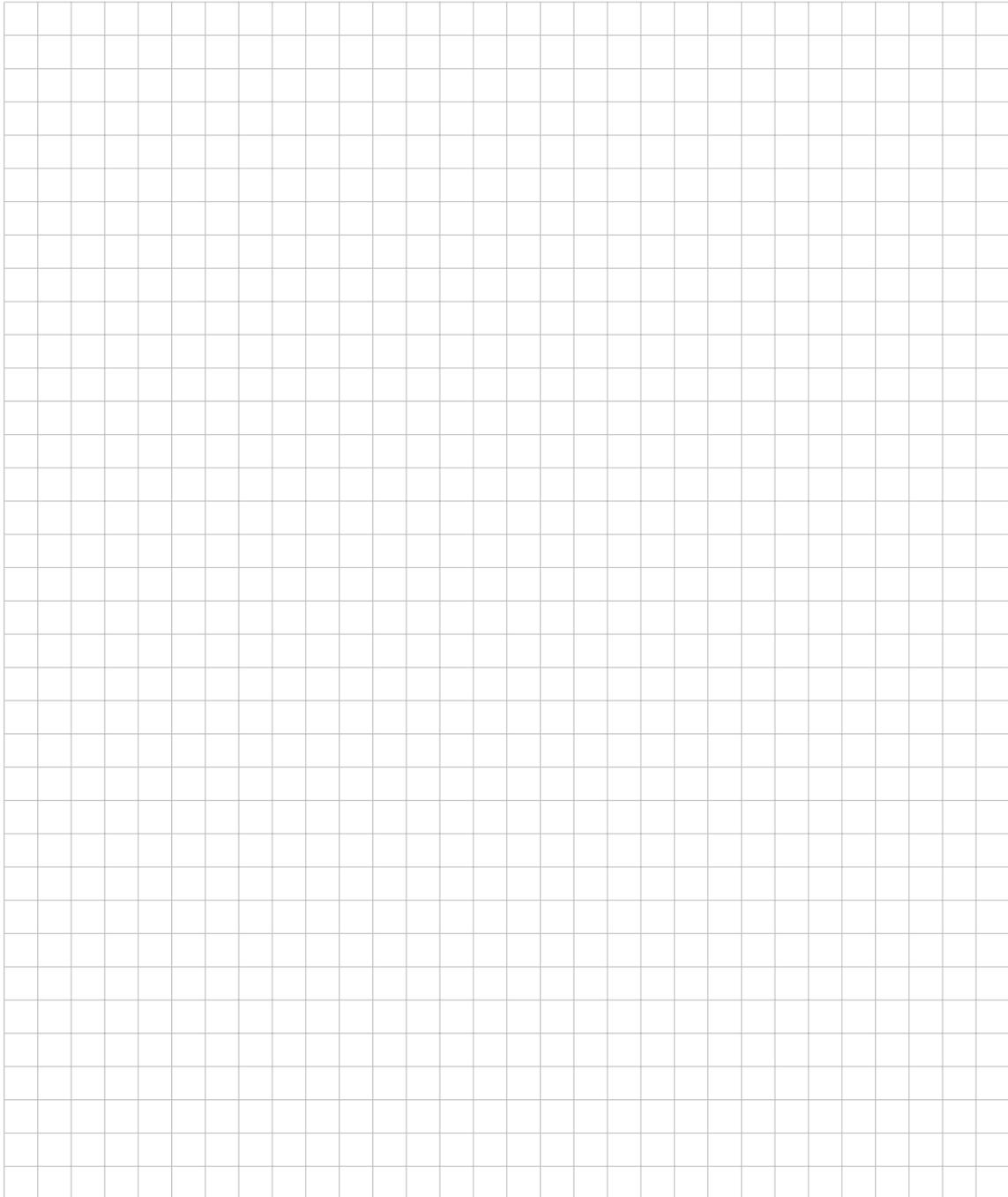
Berechne die jeweils fehlenden Stücke im rechtwinkligen Kugeldreieck ($\gamma = 90^\circ$).

a) $a = 65^\circ$, $b = 55^\circ$. (Berechne c , α , β)

b) $a = 36^\circ$, $\alpha = 40^\circ$.

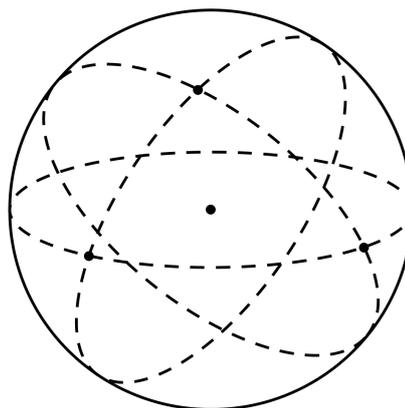
c) $a = 110^\circ$, $c = 132^\circ$.

d) $a = 85^\circ$, $\beta = 108^\circ$.



3. Gleichschenklige Dreiecke

Wie in der ebenen Geometrie kann man ein gleichschenkliges Dreieck in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke unterteilen. Damit kann man die obigen Formeln sinngemäss anwenden.



4. Übungen

- Ein gleichschenkliges Dreieck hat Seitenlängen 115° , 115° und 65° . Berechne die Winkel.
- Berechne die Seiten des gleichwinkligen Dreiecks mit Winkeln 72.5° .



5. Flugdistanz zum Ersten

In einzelnen Fällen können wir mit dem vorhandenen Wissen den Abstand zweier Orte auf der Erdoberfläche bereits berechnen.

Fall 1: Ein Punkt liegt auf dem Äquator. Als Beispiel dienen die Städte Quito (0° N, $78^\circ 30'$ W) und Madrid ($40^\circ 24'$ N, $3^\circ 42'$ W).

**6. Flugdistanz zum Zweiten**

Fall 2: Wenn die Längenmeridiane einen rechten Winkel einschliessen, dann können wir die Flugdistanz auch schon berechnen.

New Orleans (30° N, 90° W), London ($51^\circ 30'$ N, 0° W).

**7. Anwendung**

Wo liegen die Orte auf dem Äquator, welche von Gibraltar ($36^\circ 12'$ N, $5^\circ 24'$ W) gleiche Entfernung haben wie Gibraltar vom Nordpol entfernt ist? (Suche sie auf einer Karte.)



8. Flächenberechnung

Sizilien hat nahezu die Form eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks mit Seitenlängen 295 km, 295 km und 186 km. Berechne mit diesen Angaben und dem Erdradius 6370 km die Fläche von Sizilien.

**9. Platonische Körper**

Welchen Winkel schliessen zwei Seitenflächen eines Ikosaeders miteinander ein?

**Lernkontrolle**

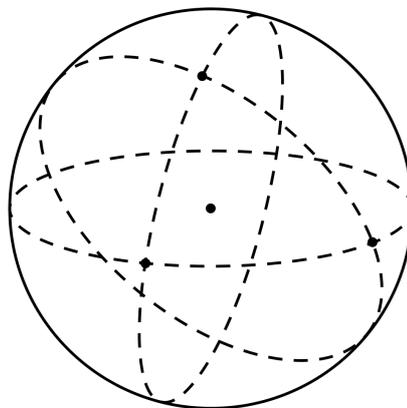
Die Schenkel eines gleichschenkligen Kugeldreiecks messen 62° , der dazwischen liegende Winkel 84° .

Berechne die Basis dieses Dreiecks und dessen Fläche, wenn man als Kugelradius $r = 1$ annimmt.

2.4. Beliebige Kugeldreiecke

1. Der Sinus-Satz

Analog zum Sinus-Satz in der ebenen Geometrie gibt es auch in der sphärischen Trigonometrie einen Sinus-Satz.



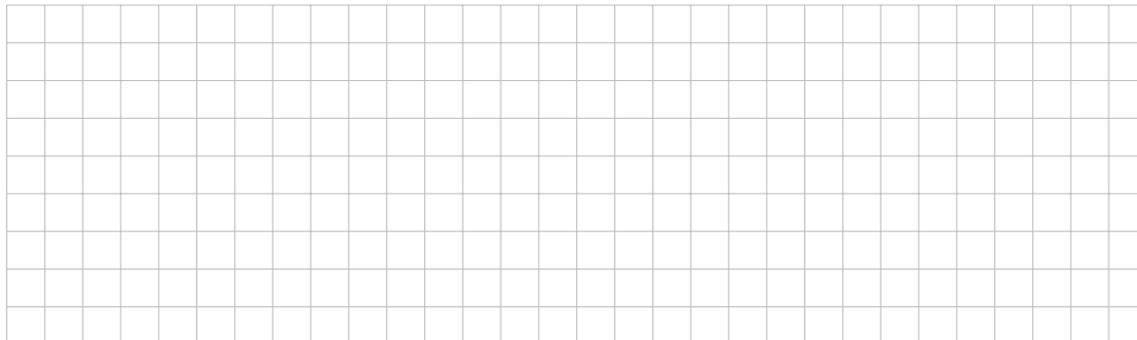
2. Der Seiten-Cosinus-Satz

Den Cosinus-Satz gibt es in der sphärischen Trigonometrie in zwei Varianten, nämlich einerseits ausgehend von den Seiten, andererseits ausgehend von den Winkeln. Wir leiten nur den Seiten-Cosinus-Satz her und verwenden die gleiche Figur wie zum Beweis des Sinus-Satzes.



3. Der Winkel-Cosinus-Satz

(ohne Herleitung)

**4. Drei Seiten**

Die folgenden 6 Berechnungsaufgaben behandeln alle Grundsituationen. Gesucht sind immer die fehlenden Seiten resp. Winkel der sphärischen Dreiecke.

$$a = 64^\circ, b = 78^\circ, c = 105^\circ.$$

**5. Drei Winkel**

$$\alpha = 72^\circ, \beta = 68^\circ, \gamma = 84^\circ.$$



6. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel

$$a = 34^\circ, b = 52^\circ, \gamma = 22^\circ.$$

**7. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel**

$$a = 75^\circ, \beta = 36^\circ, \gamma = 48^\circ.$$

**8. Zwei Seiten und ein anliegender Winkel**

$$a = 50^\circ, b = 65^\circ, \alpha = 54^\circ.$$



9. Zwei Winkel und eine anliegende Seite

$$a = 54^\circ, \alpha = 85^\circ, \beta = 62^\circ.$$

**10. Sphärischer Abstand**

Berechne den sphärischen Abstand der Punkte P und Q .

$$P(\varphi = 65^\circ, \theta = 35^\circ) \text{ und } Q(\varphi = -45^\circ, \theta = -55^\circ).$$

**11. Flugdistanz**

Berechne die kürzeste Entfernung von Seoul ($37^\circ 30' \text{ N}$, 127° E)
nach Tokyo ($35^\circ 40' \text{ N}$, $139^\circ 45' \text{ E}$).



12. Der Kurswinkel

Ein Flug führt von Madrid ($40^\circ 24' \text{ N}$, $3^\circ 42' \text{ W}$) nach Boston ($42^\circ 18' \text{ N}$, $71^\circ 03' \text{ W}$). In welchem Winkel muss das Flugzeug in Madrid abfliegen, wenn es auf einem Grosskreis fliegt?

**13. Überquerung des Äquators**

Ein Frachtschiff fährt von Madras (17° N , $80^\circ 30' \text{ E}$) nach Perth (32° S , 116° E).

- Bei welchem Längengrad überquert das Schiff den Äquator.
- Bestimme in diesem Punkt den Schnittwinkel der Schiffsroute mit dem Äquator.



14. Entfernungen

Ein Schiff fährt von West Palm Beach (27° N, 80° W)
nach Porto ($41^\circ 15'$ N, $8^\circ 45'$ W).

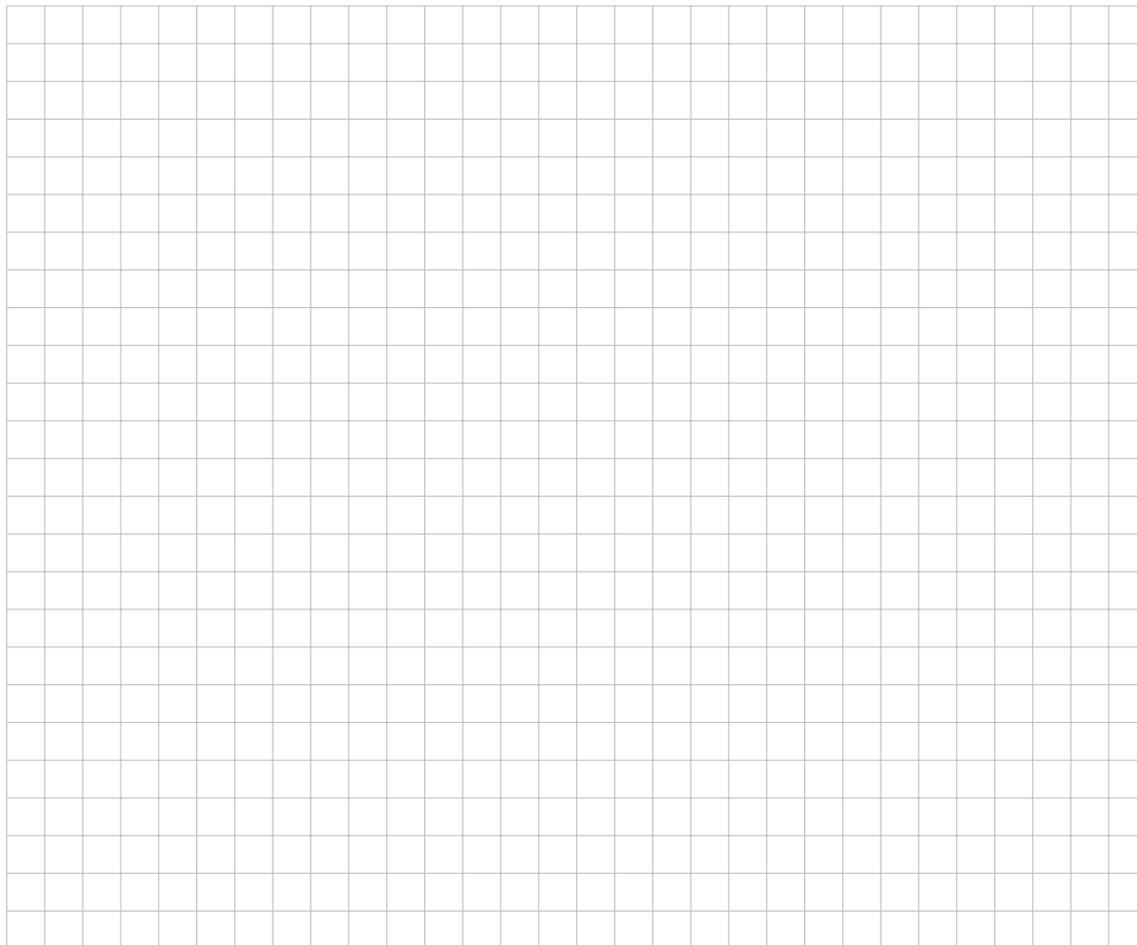
- a) Bestimme den nördlichsten Punkt der Route.
- b) Wie weit führt diese Route an den Bermudas ($32^\circ 30'$ N, $64^\circ 30'$ W) vorbei?



15. Peilung

Ein Schiff auf dem Atlantik sendet ein Notsignal aus.

In Plymouth ($50^{\circ} 18' \text{ N}$, $4^{\circ} 06' \text{ W}$) wird das Signal unter dem Azimut 225° empfangen, in La Coruña ($43^{\circ} 24' \text{ N}$, $8^{\circ} 30' \text{ W}$) unter dem Azimut 300° . Wo ist das Schiff?

**Lernkontrolle**

Berechne die Länge der Flugroute von New York ($40^{\circ} 51' \text{ N}$, 74° W) nach Melbourne ($37^{\circ} 48' \text{ S}$, 145° E)