

Lineare Algebra

1. Matrizen

1.1. Was ist eine Matrix

1. **Beispiel**

Eine Firma stellt aus Materialien A, B, C, D drei Produkte her. Fürs Produkt X benötigt man fünf Teile A , 7 Teile B und drei Teile D . Fürs Produkt Y benötigt man 12 Teile B , 6 Teile C und 7 Teile D . Das Produkt Z wird aus 4 Teilen A , 5 Teilen B , 11 Teilen C und 13 Teilen D hergestellt.

Ein Kunde kauft 14 Stück vom Produkt X , 18 Stück vom Produkt Y und 22 Stück vom Produkt Z . Welches Material muss der Produzent bereitstellen, damit die verlangte Bestellung ausgeführt werden kann?

	A	B	C	D
X				
Y				
Z				

Was ist wohl einfacher zu lesen, der Text oder das Zahlenschema?

2. **Taxi-Fahrten**

Ein Taxiunternehmen hat drei Standorte: Bahnhof, Zentrum und Seepromenade. Jedes Taxi fährt, nachdem der Kunde ausgestiegen ist, zum nächstliegenden Standort. Dadurch ergeben sich gewisse Wahrscheinlichkeiten, wo die Taxis zu stehen kommen.

	Bahnhof	Zentrum	Seepromenade
Bahnhof			
Zentrum			
Seepromenade			

Wie muss man die Taxis verteilen, damit es nicht plötzlich an einem Standort keine Taxis mehr hat?

3. Definition

Eine Matrix ist ein rechteckiges Schema von Zahlen, welche in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind.



Man spricht von einer $m \times n$ - Matrix.

Das Produkt $m \cdot n$ ist die Dimension dieser Matrix.

Falls $m = n$, dann hat man eine quadratische Matrix der Dimension $n \times n$.

Weitere Begriffe: Zeilenvektor, Spaltenvektor:



1.2. Rechnen mit Matrizen

1. Addition und Subtraktion

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

Wir halten fest:

2. Rechengesetze

$$A + B = B + A \dots\dots\dots$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \dots\dots\dots$$

3. Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

$$\text{a) } 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\text{b) } -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} =$$

Wir halten fest:

4. Übungen

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\text{b) } 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} =$$

7. **Übungen**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$

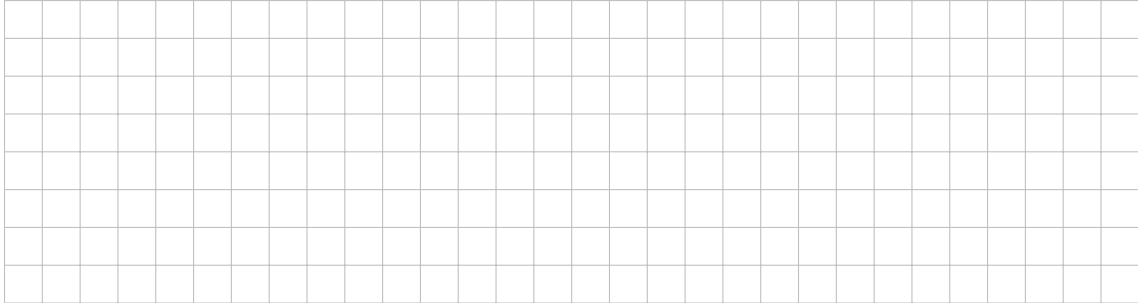
e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Berechne $A \cdot B - 4 \cdot A = ?$



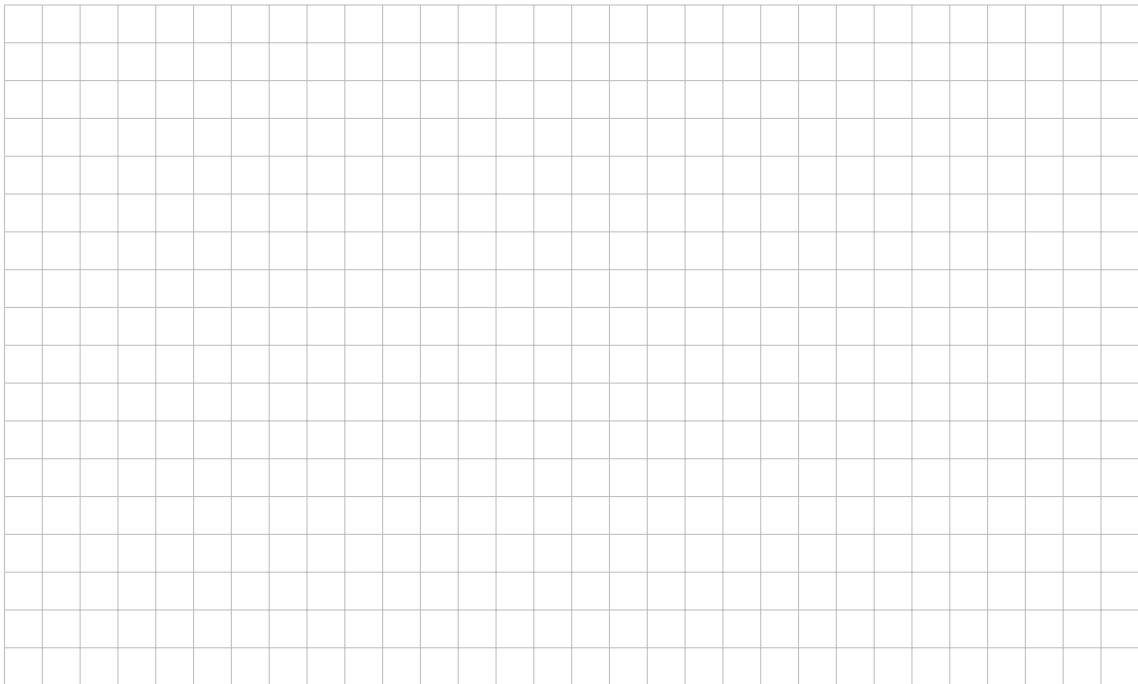
8. Potenzieren von Matrizen

Damit man eine Matrix potenzieren kann, muss sie quadratisch sein.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Berechne } A^2 = ?$$

**9. Rechengesetze**

- Gilt $A \cdot B = B \cdot A$?
- Gilt $A \cdot B = B \cdot A$ für quadratische Matrizen?
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

**10. Distributivgesetz**

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ und } (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

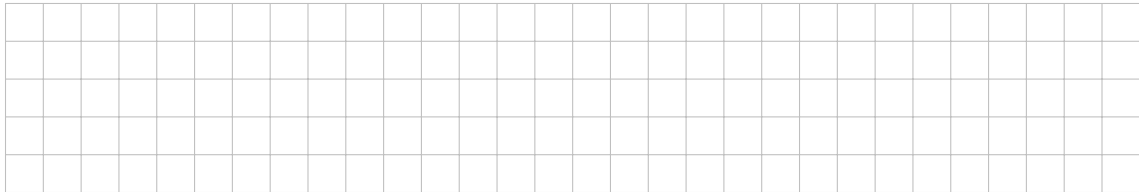
Die beiden Distributivgesetze sind gültig, sofern die Ergebnisse definiert sind, d.h. sofern die Dimension stimmt. Es kann sein, dass ein Produkt in eine Richtung definiert ist und in die andere nicht. An der Reihenfolge der Berechnungen darf im Matrizenkalkül nichts geändert werden.

1.3. Spezielle Matrizen

1. Die Nullmatrix

Wenn man zu einer Zahl die Null addiert, dann verändert man an der Rechnung nichts. Der Mathematiker spricht in diesem Zusammenhang vom **neutralen Element** der Addition.

Ein solches Element gibt es auch bei den Matrizen, genannt **Nullmatrix** N .



2. Überlegungsaufgabe

Wenn ein Produkt von zwei (reellen) Zahlen Null ergibt, dann muss – mindestens – eine der beiden Zahlen selber die Null sein.

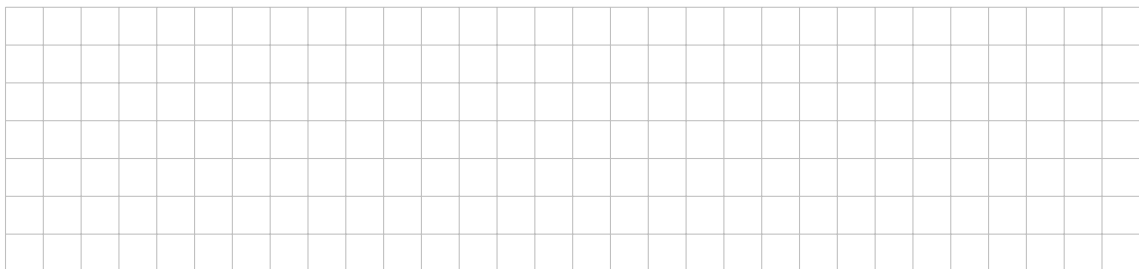
Diese Tatsache ist beim Lösen von Gleichungen wichtig, denn wenn beispielsweise $(x - 3) \cdot (x + 5) = 0$ gegeben ist, dann ist entweder $x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0$.

Nun stellt sich die Frage, ob das sinngemäss für Matrizen auch gilt: Wenn $A \cdot B = N$, muss dann $A = N$ oder $B = N$ sein?



3. Übung

Berechne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

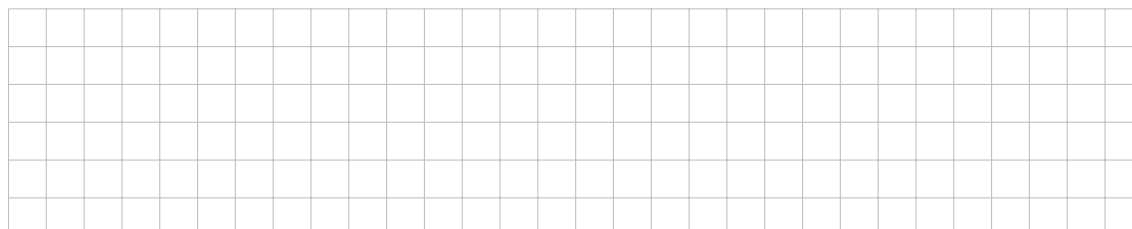


4. **Das neutrale Element der Multiplikation**

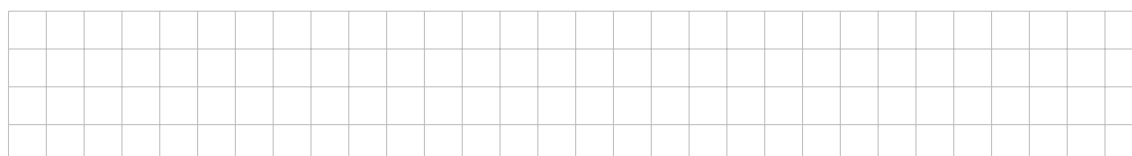
Für die Multiplikation von reellen Zahlen ist die Eins das neutrale Element, denn wenn man eine Zahl x mit 1 multipliziert, dann ist $x \cdot 1 = x$.

5. **Die Einheitsmatrix**

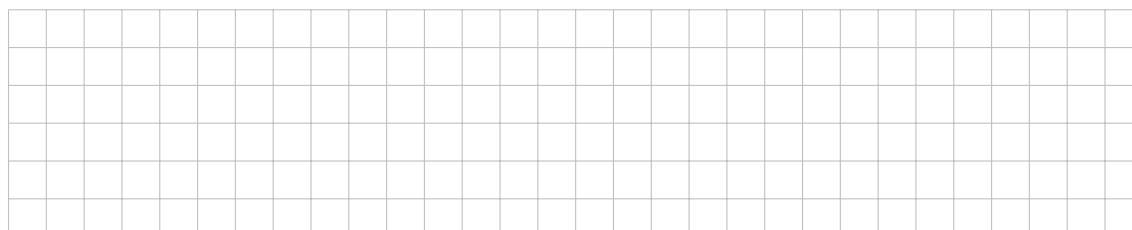
Gesucht ist nun das neutrale Element der Matrixmultiplikation. Wir suchen also eine Matrix I so, dass $A \cdot I = A$.

6. **Bemerkung**

Gegeben ist eine 2×2 - Matrix M . Was ist $5 \cdot M$ als Produkt zweier Matrizen geschrieben?

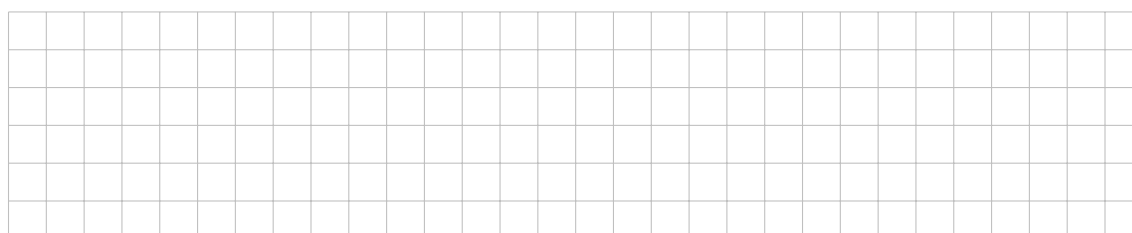
7. **Überlegungsaufgabe**

Kann das Produkt zweier Matrizen die Einheitsmatrix ergeben?

8. **Übungen**

a) Berechne $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} =$

b) Berechne $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} =$



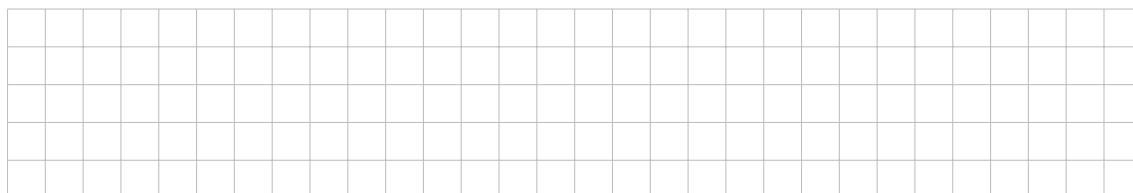
9. Berechnung

Gegeben ist eine beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Gesucht ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ so, dass das Produkt $A \cdot B$ die Einheitsmatrix I ergibt.

Man hat also $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**10. Definition**

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Man definiert die **inverse Matrix** A^{-1} wie folgt:

**11. Zwischenbemerkungen**

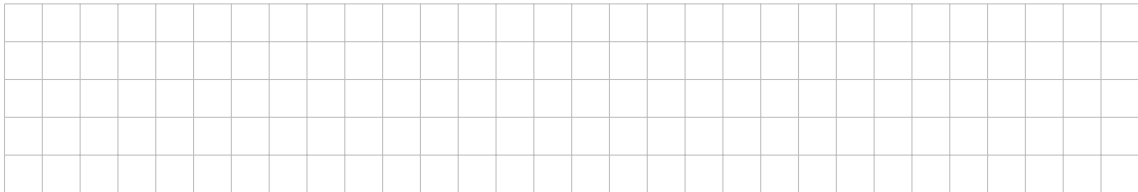
Wir betrachten hier nur quadratische 2×2 – Matrizen.

Für nicht quadratische Matrizen gibt es keine Inverse. (Dimensionsfehler)

Für grössere quadratische Matrizen gibt es Regeln für die inverse Matrix, aber die Berechnung überlassen wir dem Taschenrechner.

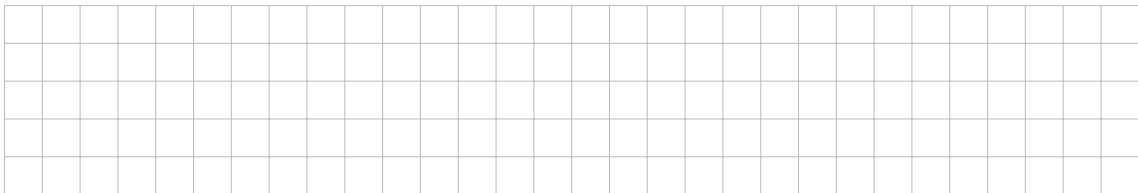
12. Überlegungsaufgabe

Gegeben ist eine Matrix, aber nicht die Nullmatrix. Existiert zu jeder solchen Matrix eine Inverse?



13. Definition

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Man definiert



Eine Matrix heisst **regulär**, wenn $\det(A) \neq 0$.
Eine Matrix heisst **singulär**, wenn $\det(A) = 0$.

14. Übung

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & t \end{pmatrix}$.

- a) Setze $t = 3$ und berechne die Inverse A^{-1} . Überprüfe, dass in diesem Fall das Matrixprodukt kommutativ ist, d.h. prüfe, dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$ gilt.
- b) Für welchen Wert von t wird die Matrix singulär.



15. Verständnisfragen

Betrachte 2×2 - Matrizen.

- a) Für eine Matrix sei bekannt, dass der zweite Spaltenvektor ein Vielfaches des ersten Spaltenvektors ist. Kann resp. muss diese Matrix singular sein?
- b) Umgekehrte Richtung: Von einer Matrix weiss man, dass sie singular ist. Kann resp. muss der zweite Spaltenvektor ein Vielfaches des ersten Spaltenvektors sein?
- c) Ist das Produkt einer singulären Matrix mit einer regulären immer eine singuläre Matrix?
- d) Das Produkt zweier Matrizen ergibt die Nullmatrix. Ist mindestens eine der beiden Matrizen des Produkts singular? Oder müssen sogar beide singular sein?



1.4. Gleichungen mit Matrizen

1. Bemerkung

Wir betrachten nur Gleichungen mit quadratischen 2×2 - Matrizen oder Vereinfachungen davon, indem wir stehende oder liegende Vektoren mit zwei Elementen suchen.

2. Die beiden Grundsituationen

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Gesucht ist die Matrix C so, dass $A \cdot C = B$

b) Gesucht ist die Matrix D so, dass $D \cdot A = B$



3. Übung

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Berechne M .

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne A .

c) $B \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}$. Berechne B .

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot M - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot M$. Berechne M

