3. Lineare Abbildungen

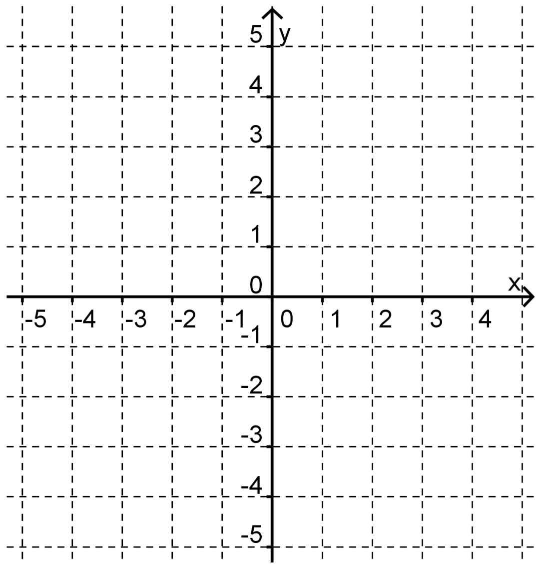
3.1. Abbildungsmatrizen

1. **Beispiel**

   Wir betrachten die lineare Abbildung mit den Gleichungen
   $\bar{x} = 2x - y$
   $\bar{y} = x + 3y.$

   a) Bestimme das Bild des Einheitsquadrats.

   b) Bestimme das Bild des Ortsvektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



2. **Die Abbildungsmatrix**

   Damit wir nicht für jede Abbildung die Gleichungen ausschreiben müssen, empfiehlt sich die Matrixschreibweise. Für die obige Abbildung notieren wir die Abbildungsmatrix

3. **Von der Abbildung zur Matrix**

   Welche Matrizen gehören zu den folgenden Abbildungen?

   a) Spiegelung an der x-Achse.

   b) Zentrische Streckung mit Faktor 7 vom Koordinatenursprung aus.

   Übrigens betrachten wir nur Abbildungen, bei denen der Koordinatenursprung fest bleibt. Parallelverschiebungen (beispielsweise) gehören hier nicht dazu.

4. **Von der Matrix zur Abbildung**

   Beschreibe die Abbildungen möglichst genau.

   a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

5. **Einheitspunkte**

   Eine Abbildung wird beschrieben durch $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

   Bestimme die Bildpunkte der Einheitspunkte $(\,1\,|\,0\,)$ und $(\,0\,|\,1\,)$. Was fällt auf?

6. **Satz**

7. **Bildpunkte**

   Eine Abbildung wird beschrieben durch $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

   Bestimme die Bildpunkte von $(\,5\,|\,8\,)$ und $(\,-2\,|\,7\,)$.

8. **Drehungen**

Das Drehzentrum ist immer der Koordinatenursprung $(0\,|\,0)$.

a) Bestimme die Matrix der Drehung mit Winkel 90°.

b) Welches ist die Matrix zur Drehung mit $\alpha = 60°$?

c) Verallgemeinere: Bestimme die Drehmatrix für beliebige Drehwinkel α.

9. **Geradenspiegelungen**

Die Spiegelungsachse geht immer durch den Koordinatenursprung $(0\,|\,0)$.

a) Man spiegelt an $y = -x$. Wie lautet die Matrix?

b) Man spiegelt an $y = 2x$. Wie lautet die Matrix?

Übung

Bestimme die Matrix der Spiegelung an der Geraden $y = \frac{1}{7}x$.

10. **Drehstreckungen**

Das Zentrum ist immer der Koordinatenursprung $(\,0\,|\,0\,)$.

a) Man hat eine Drehstreckung mit Winkel $90°$ und Streckungsfaktor 2. Bestimme die zugehörige Matrix.

b) Welche Drehstreckung gehört zur Matrix $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$?

c) Welche Drehstreckung gehört zur Matrix $\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$?

3.2. Zusammensetzen von Abbildungen

1. **Überlegungsaufgabe**
   Zwei Abbildungen sind durch ihre Matrizen gegeben:
   Abbildung 1 hat die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, Abbildung 2 hat die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.
   Welche Matrix beschreibt die Abbildung, die entsteht, wenn man zunächst Abbildung 1, danach Abbildung 2 durchführt?

2. **Satz**

3. **Drehstreckung**
   Eine Drehstreckung kann man (logischerweise) aus einer Drehung und einer Streckung zusammensetzen. Bestimme so die allgemeine Matrix einer Drehstreckung.

4. **Zwei Drehungen**

Die erste Abbildung ist eine Drehung mit Drehwinkel α, die zweite Abbildung ist eine Drehung mit Winkel β. Bestimme die Matrix der Zusammensetzung.
Aus dieser Herleitung folgert man die Formeln für $\cos(\alpha + \beta)$ und ähnliche.

Lernkontrolle

Man führt folgende zwei Abbildungen hintereinander aus:
Abbildung 1: Spiegelung an der x-Achse.
Abbildung 2: Spiegelung an der Geraden $y = 2x$.
Was ist die Zusammensetzung?

3.3. Eigenwerte und Eigenvektoren

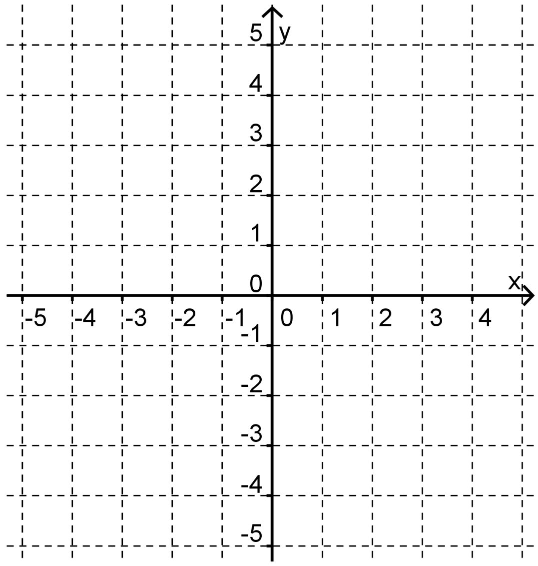
1. **Beispiel**

   Eine lineare Abbildung wird beschrieben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimme die Bilder der Punkte $A\ (2\,|\,4)$ und $B\ (2\,|-1)$.

   b) Beschreibe diese Abbildung.

   c) Gibt es noch weitere Ortsvektoren, die auf ein Vielfaches von sich abgebildet werden?



2. **Eigenwerte, Eigenvektoren**

   Wir suchen zu einer gegebenen Matrix diejenigen Vektoren, welche auf ein t-faches von sich selber abgebildet werden.
   Solche Vektoren nennt man **Eigenvektoren**, die zugehörigen Werte t nennt man **Eigenwerte**.

3. **Musterbeispiel**

   Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **Übungen**

   Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren und beschreibe, sofern möglich, die Abbildung.

   a) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & -0.2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Aus einer Prüfung

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{3} & 3 \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$.