Mathematik

Klasse 6B O. Riesen

1. **Kurvenbetrachtungen**
Für jedes $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = (t+1) \cdot x^2 - t \cdot x^4$ eine Funktion gegeben.

a) Setze $t = 3$, d.h. betrachte die Kurve $y = f_3(x) = 4x^2 - 3x^4$. Bestimme die exakten Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extremas, Wendepunkte).

b) Die Kurve $y = f_t(x)$ soll die Gerade $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ berühren. Bestimme alle möglichen Werte von t sowie die Koordinaten der zugehörigen Berührpunkte.

Für die Teilaufgaben c) und d) betrachten wir die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f_t(x)$ liegende Fläche. Die beiden Teilaufgaben sind unabhängig.

c) Setze $t = \frac{1}{3}$. Die Parabel $y = x^2$ teilt die betrachtete Fläche in 2 Teilflächen. Bestimme das Verhältnis der beiden Teilflächen.

d) Für welchen Wert von t wird die betrachtete Fläche minimal? Bestimme diese minimal mögliche Fläche.

2. **Wendetangenten (Thema mit Variationen)**
Die folgenden drei Teilaufgaben zu Wendetangenten sind voneinander unabhängig.

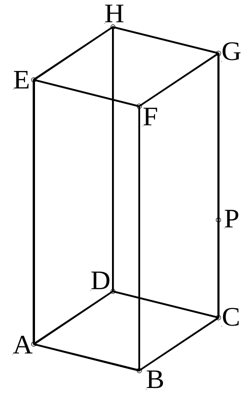
a) Die Kurve zu $y = f(x) = \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ hat zwei Wendepunkte. Bestimme den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Wendetangenten.

b) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 2 \cdot e \cdot x \cdot e^x$. Geht die Wendetangente exakt durch den Punkt (–4 | 0)? Oder nur beinahe? Begründe.

c) Für $t > 0$ ist $y = f_t(x) = \ln\left(\frac{x^2 + t}{2t}\right)$ gegeben.

Behauptung: Alle Wendetangenten dieser Kurven schneiden sich in einem Punkt P. Bestimme die Koordinaten dieses Punktes P und zeige, dass alle Wendetangenten durch P gehen.

3. **Quadratische Säule (Vektorgeometrie)**
Von einem geraden quadratischen Prisma (Quader, siehe die Figur) ist die Ecke E(1 | 10 | –11) bekannt. Das Quadrat ABCD liegt in der Ebene ε: $2x - 6y + 3z - 56 = 0$. Ferner weiss man, dass der Punkt P(18 | 1 | ½) auf der Seitenkante CG liegt.



a) Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene ε.

b) Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte des Quaders.

c) Berechne die Fläche des Dreiecks EAP.

4. **Eine Kugel und eine Gerade**
   Gegeben sind die Kugel k_1 durch den Mittelpunkt M_1 (3 | 1 | 5) und den Radius $r_1 = 6$ sowie die Gerade g: (1 | –7 | 13) (2 | –6 | 12)

   a) In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneiden sich die Kugel k_1 und die Gerade g?

   b) Gesucht ist eine weitere Kugel k_2 mit Radius $r_2 = 12$, welche das Zentrum M_2 auf der Geraden g hat und welche die Kugel k_1 berührt.
      b1) Bestimme *ein* mögliches Zentrum M_2 sowie die Koordinaten des Berührpunktes.
      b2) Wie viele Lösungen für die Kugel k_2 sind möglich? (Begründe.)

   c) Zeige, dass die Punkte P(5 | 5 | 9) und Q(7 | –1 | 1) auf der Kugel k_1 liegen.
      Wie lang ist die kürzeste Verbindung von P nach Q, welche auf der Oberfläche der Kugel k_1 verläuft?

5. **Ein Spiel**
   In einem Behälter befinden sich zwei äusserlich nicht unterscheidbare Würfel. Einer ist ein üblicher, symmetrischer Würfel, der andere Würfel ist jedoch gefälscht und zeigt die Augenzahl "6" mit Wahrscheinlichkeit 1/3.
   Du ziehst blind einen der beiden Würfel. Dann wirfst du diesen Würfel einmal. Nach dem ersten Wurf *darfst* du den Würfel wechseln. Dann wirfst du (wenn du gewechselt hast, mit dem anderen, sonst mit dem gleichen Würfel) noch einmal.
   Wenn in den beiden Würfen zwei "6" erschienen sind, dann gewinnst du 4.– Franken; wenn genau eine "6" erschienen ist, dann gewinnst du 3.– Franken; aber wenn keine "6" erschienen ist, dann verlierst du 2.– Franken. Selbstverständlich sollte der zu erwartende Gewinn möglichst gross werden.

   Wir schlagen dir drei mögliche Spielstrategien vor:

   a) Du machst vom Recht, den Würfel zu wechseln, *keinen* Gebrauch und verwendest für den zweiten Wurf den gleichen Würfel wie für den ersten Wurf.

   b) Wenn im ersten Wurf eine "6" erschienen ist, dann wechselst du den Würfel *nicht*, (weil ein Sechser günstig ist und Gewinn bringt), wenn im ersten Wurf aber keine "6" erschienen ist, dann wechselst du den Würfel und nimmst den anderen für den zweiten Wurf.

   c) Egal, welches das Ergebnis des ersten Wurfes war; du machst von deinem Recht Gebrauch und wechselst den Würfel *auf alle Fälle*. (Mit dieser Strategie nimmst du sicher einmal den gefälschten Würfel, der mit höherer Wahrscheinlichkeit eine gewinnbringende "6" zeigt.)

   Begründe ausführlich, welche der drei Strategien den grössten zu erwartenden durchschnittlichen Gewinn einbringt.
   Hinweis: Es könnte nützlich sein, für jede Spielstrategie das vollständige Baumdiagramm aufzuzeichnen.

6. **Kurzaufgaben aus verschiedenen Gebieten**

a) **Zahlenfolge**
Eine geometrische Folge beginnt mit 51, 50, ...
Wie viele Folgenglieder dieser Folge muss man summieren, um mehr als 2500 zu erhalten? Bestimme die kleinstmögliche Anzahl Summanden und die zugehörige Summe.

b) **Münzen**
In einem Portemonnaie befinden sich 20 Münzen, nämlich 5 zu 10 Rp, 6 zu 20 Rp und 9 zu 50 Rp. Ungeschickterweise fallen diese Münzen auf den Boden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen genau drei 10-Rappen-Münzen, genau zwei 20-Rappen-Münzen und genau vier 50-Rappen-Münzen Zahl?
Selbstverständlich nehmen wir an, die Münzen fallen zufällig.

c) **Glücksrad**
Auf einem Jahrmarkt steht ein Glücksrad, von welchem der Veranstalter behauptet, die Gewinnchance bei jeder Drehung sei 20%. In 600 Drehungen beobachten wir aber nur 105 Gewinne. Welche statistische Folgerung ziehen wir daraus? ($\alpha = 5\%$)

d) **Kombinatorik**
Wie viele 7-buchstabige "Wörter" (Buchstabensequenzen) mit genau zwei "T" und höchstens zwei Vokalen gibt es?
(Beispielsweise SCHNITT, STRESST, CONTENT, TRCPRST)
Das Alphabet habe 26 Buchstaben, davon 6 Vokale.

****