Lösung Matura 6B (2006)

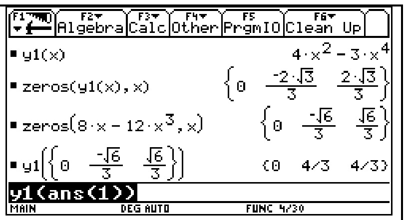
Aufgabe 1a)

Definiere die Funktion. (Die Funktion ist gerade.)

Nullstellen $(0 \mid 0)$, $\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \mid 0\right)$

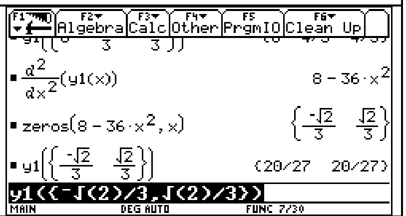
$y' = 8x - 12x^3$. $y' = 0$ nach x auflösen und einsetzen.

Ein Minimum in $(0 \mid 0)$ und zwei Maxima. $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3} \mid \frac{4}{3}\right)$

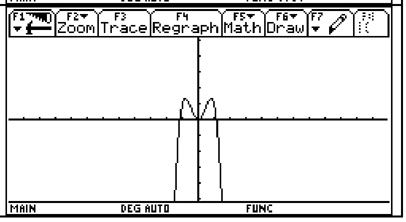


$y'' = 8 - 36x^2$. Nullstellen davon bestimmen. Einsetzen.

2 Wendepunkte $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3} \mid \frac{20}{27}\right)$

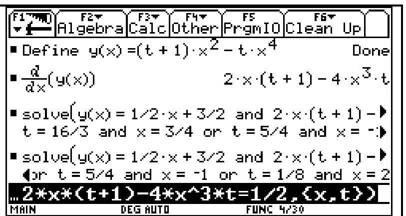


Zur Illustration ist hier noch die Grafik angezeigt:
Die Skizze war nicht verlangt.

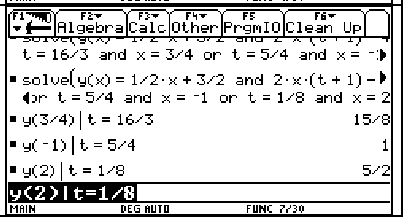


Aufgabe 1b)

Definiere $y(x) = (t + 1)x^2 - t\,x^4$ und bestimme $y'(x)$.

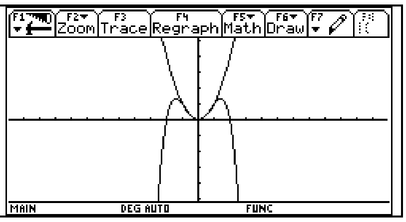


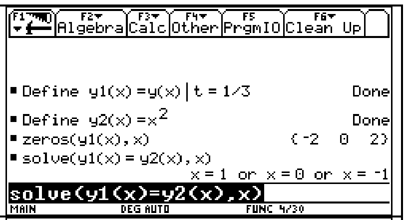
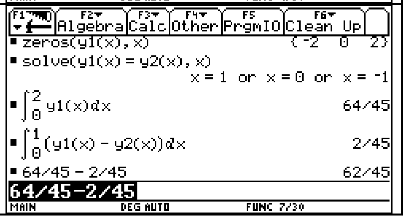
Dann muss $y(x) = 1/2x + 3/2$ sowie $y'(x) = ½$ sein.
Lasse nach x und t auflösen. Das gibt
I) $t = 16/3$, $x = ¾$, also den Berührpunkt $(3/4 \mid 15/8)$
II) $t = 5/4$, $x = -1$, also den Berührpunkt $(-1 \mid 1)$
III) $t = 1/8$, $x = 2$, also den Berührpunkt $(2 \mid 5/2)$



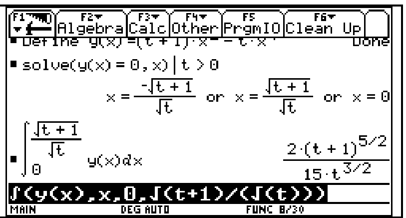
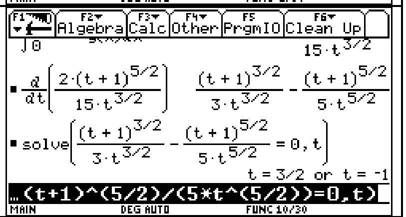
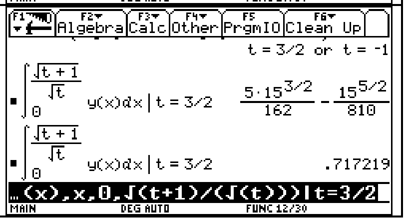
Aufgabe 1c)

Definiere $y1(x)$ neu für $t = 1/3$ und $y2(x) = x^2$
Die Grafik zeigt, dass die linke Teilfläche sehr klein wird.

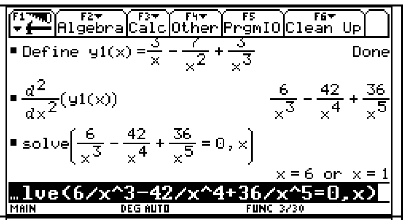
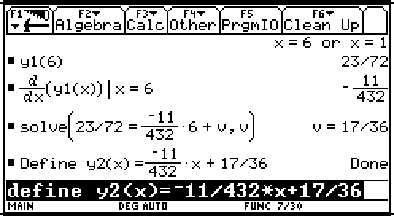
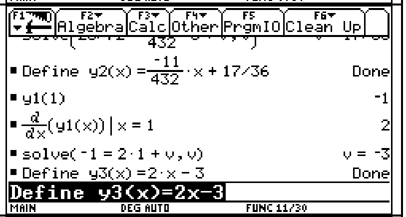
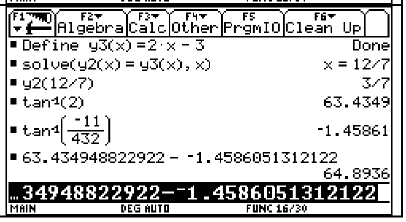


Die Nullstelle liegt bei (2 | 0), der Schnittpunkt liegt bei x = 1.	
Schreibe die Teilflächen als Integrale Fläche total: 64/45 Fläche zwischen den Kurven (linke Teilfläche): 2/45. Also ist die rechte Teilfläche 62/45 und das Verhältnis ist 2 : 62 resp. 1 : 31.	

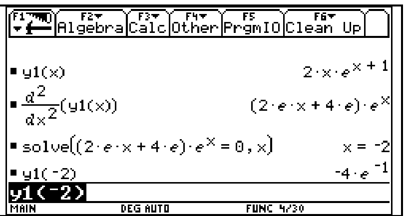
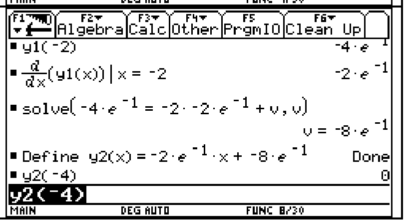
Aufgabe 1d)

Definiere y(x) wieder allgemein. Berechne die Nullstellen. Schreibe die Fläche als Integral	
Ableiten des Ausdrucks nach t und nullsetzen. Somit t = 3/2.	
Einsetzen in das Integral. Minimale Fläche 0.71722	

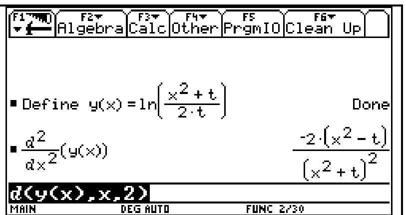
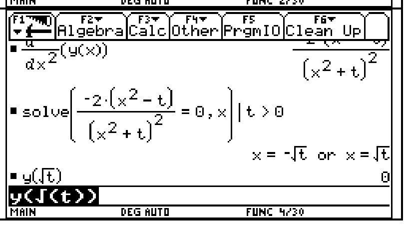
Aufgabe 2a)

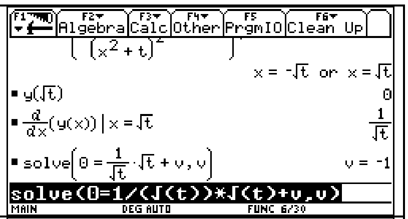
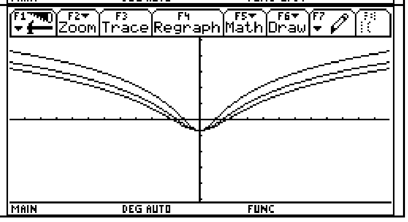
Definiere die Funktion und bestimme die Nullstellen von y". Die Wendepunkte sind (1 | –1) und (6 | 23/72)	
Wendetangente an der Stelle x = 6. y-Koordinate Steigung, dann y-Achsenabschnitt bestimmen. Definiere die Tangente als neue Funktion y2(x)	
Dasselbe für die Wendetangente an der Stelle x = 1. Definiere die Tangente als y3(x)	
Schnittpunkt der Tangenten S(1.714 | 0.429) Zwischenwinkel 64.89°.	

Aufgabe 2b)

Definiere die Funktion und bestimme den Wendepunkt.	
Dann bestimme die Wendetangente und definiere sie als y2(x). y2(–4) = 0, also geht die Wendetangente exakt durch (–4 | 0).	

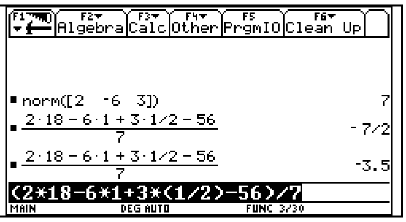
Aufgabe 2c)

Definiere die Funktion, bestimme y"	
Die Wendepunkte liegen auf der x-Achse.	

Für die Wendetangente ist v = –1, d.h. die Wendetangente geht sicher durch (0 | –1), und zwar unabhängig von t.	
Die Figur zeigt noch die Situation für t = 1, 2, 3.	

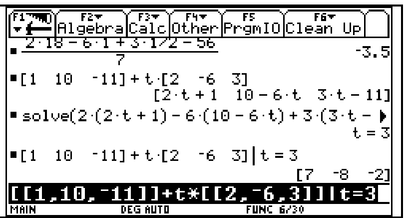
Aufgabe 3a)

P einsetzen in die HNF
Der Abstand ist 3.5

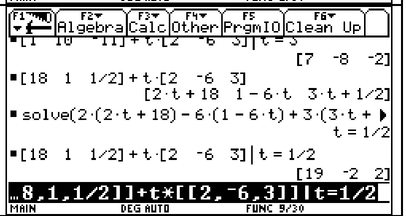


Aufgabe 3b)

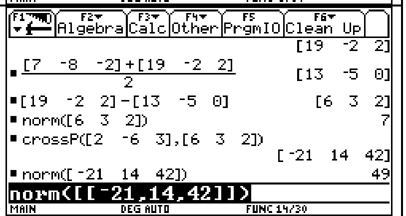
A ist der Lotfusspunkt von E auf die Ebene.
A(7 | –8 | –2)



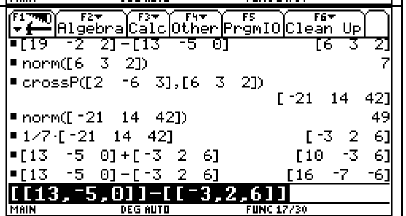
C ist der Lotfusspunkt von P auf die Ebene.
C(19 | –2 | 2)



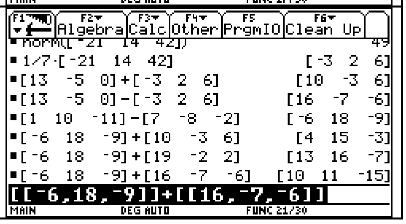
M ist der Mittelpunkt von AC. M(13 | –5 | 0).
Die Länge von MC ist 7.
Bestimme das Vektorprodukt vom Normalenvektor der Ebene mit MC. Dieser Vektor ist noch zu lang, (Länge 49), zeigt aber sicher in Richtung von MD und MB.



Also kürzen wir mit 7. Diesen Vektor hängen wir in M an.
B(10 | –3 | 6)
D(16 | –7 | –6)
(oder umgekehrt. B und D sind vertauschbar.)

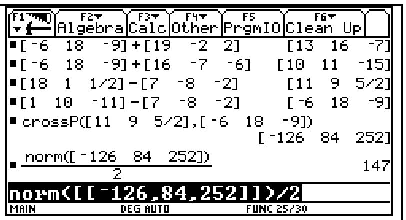


Berechne den Vektor AE und hänge ihn in B, C, D an.
F(4 | 15 | –3)
G(13 | 16 | –7)
H(10 | 11 | –15)
(oder mit vertauschten Punkten F und H.)

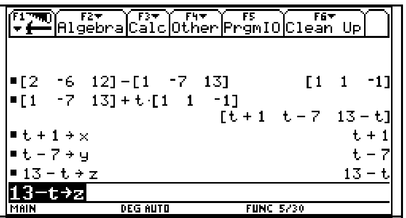
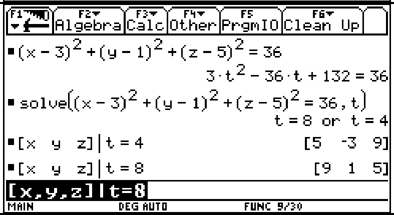
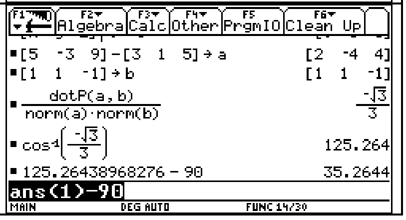


Aufgabe 3c)

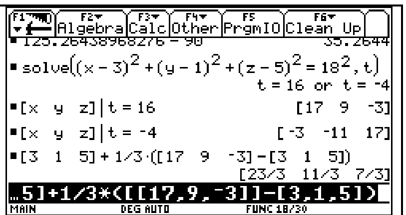
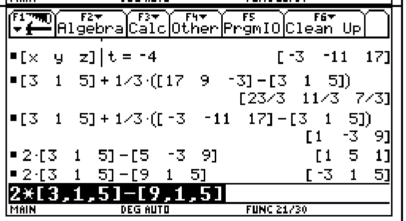
Rechne 2 Vektoren, z.B. AE und AP.
Norm des Kreuzproduktvektors, davon die Hälfte.
(Standardformel für eine Dreiecksfläche.)
F = 147.
Die Fläche erhält man auch über Grundlinie mal Höhe, wobei die Grundlinie die Länge von AE, die Höhe die Länge von AC ist, weil P auf der Gegenkante liegt.



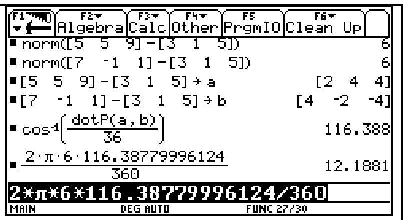
Aufgabe 4a)

Speichere die Gerade	
Schneide die Gerade mit der Kugel $S_1(5 \mid -3 \mid 9)$ $S_2(9 \mid 1 \mid 5)$	
Winkel zwischen r_g und MS_1 auf 90° ergänzen. 35.264°	

Aufgabe 4b)

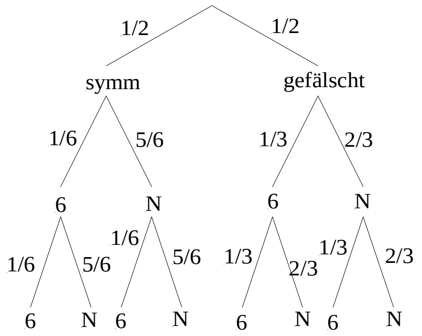
Wenn sich die Kugeln von aussen berühren, dann muss das neue Zentrum zu M_1 Abstand 18 haben. Also lege eine Kugel um M_1 mit $r = 18$ und schneide mit g. $M_2(17 \mid 9 \mid -3)$ oder $M_2(-3 \mid -11 \mid 17)$ Berührpunkte: Von M_1 aus 1/3 des Vektors M_1M_2 anhängen.	
$B(23/3 \mid 11/3 \mid 7/3)$ oder $B(1 \mid -3 \mid 9)$ Wenn die 2. Kugel die erste umschliesst, dann ist das neue Zentrum genau ein Schnittpunkt aus Aufgabe a) weil $r_2 = 2r_1$. $M_2(5 \mid -3 \mid 9)$ oder $M_2(9 \mid 1 \mid 5)$. Die Berührpunkte sind $B(1 \mid 5 \mid 1)$ oder $B(-3 \mid 1 \mid 5)$ Also gibt es total 4 Lösungen.	

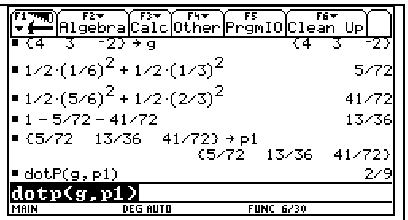
Aufgabe 4c)

Die Vektoren MP und MQ haben Länge 6, also liegen P und Q auf der Kugel. Kreisbogenlänge von P nach Q mit Kreiszentrum M_1. Also berechne den Winkel zwischen M_1P und M_1Q. Winkel 116.39° Bogenlänge 12.188 Einheiten.	

Aufgabe 5a)

<table>
<tr><td>
Speichere für alle Aufgaben die Gewinn-Variable als g.
Strategie a): Der Baum sieht so aus:

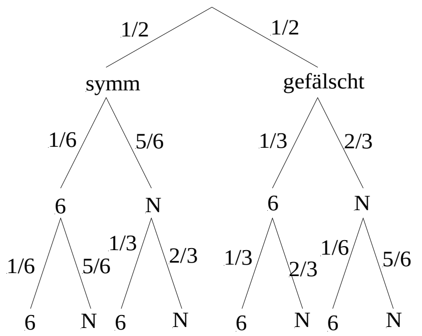


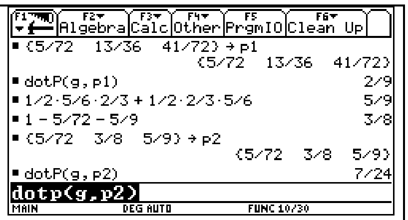
Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für zwei Sechser (Pfade 1 und 5 von links), für keinen Sechser (Pfade 4 und 8) sowie für genau einen Sechser (Komplement zu 1)
Das gibt einen Erwartungswert von 2/9 = 0.2222 Franken
</td>
<td>


</td></tr>
</table>

Aufgabe 5b)

<table>
<tr><td>
Strategie b). Jetzt sieht der Baum so aus:

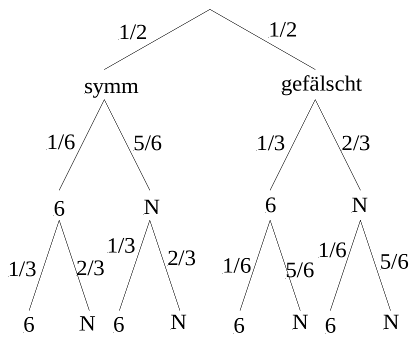


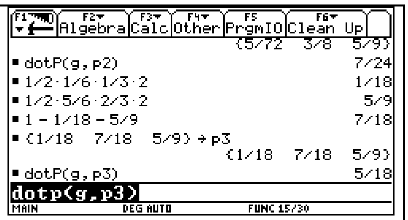
Das gibt einen Erwartungswert von 7/24 = 0.2917 Franken
Somit ist Strategie b) klar besser als Strategie a)
</td>
<td>


</td></tr>
</table>

Aufgabe 5c)

<table>
<tr><td>
Für Strategie c) hat der Baum folgende Gestalt:



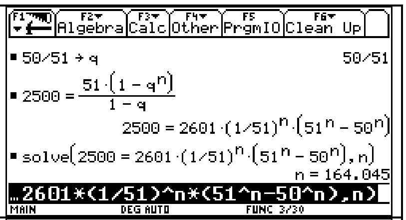
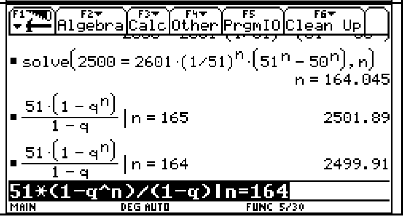
Das gibt einen Erwartungswert von 5/18 = 0.2778 Franken
Strategie c) ist zwar besser als a), aber schlechter als b).
Somit ist b) die beste Strategie.
</td>
<td>


</td></tr>
</table>

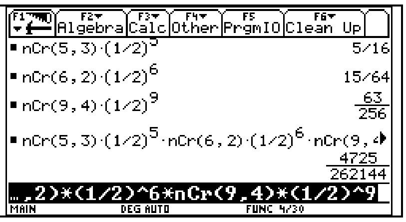
Aufgabe 5, Abschluss)

Damit ist gezeigt, dass b) die beste Strategie darstellt.	

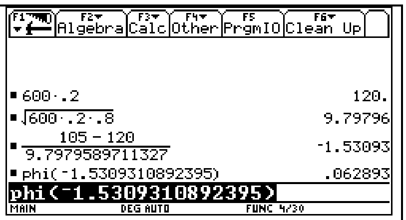
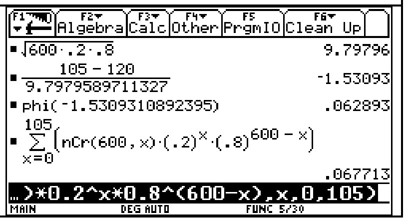
Aufgabe 6a)

<table>
<tr><td>q = 50/51
einsetzen in die Formel s_n einer GF.
n = 164.05</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Aufrunden, da die Summe überschritten werden muss
n = 165 Summanden
Summe 2501.89</td><td>
</td></tr>
</table>

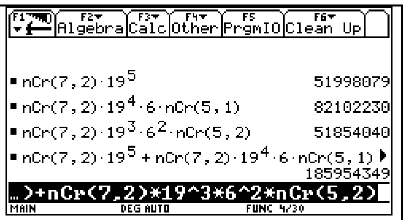
Aufgabe 6b)

<table>
<tr><td>3-fache gleichzeitige Binomialverteilung
p = 1.8024%</td><td>
</td></tr>
</table>

Aufgabe 6c)

<table>
<tr><td>Hypothesentest
n = 600, p = 0.2 (das ist H_0)
μ = 120, σ = 9.798
z = –1.531 ist betragsmässig kleiner als 1.645.
Φ(–1.531) = 6.29% ist grösser als 5%.
Also ist das Glücksrad in Ordnung; H_0 beibehalten
Ein Verdacht, dass die Angabe des Veranstalters nicht stimmt, ist unberechtigt.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die Aufgabe kann auch mit Binomialverteilung exakt gelöst werden. Dann wird s = 6.77% (siehe Output)</td><td>
</td></tr>
</table>

Aufgabe 6d)

<table>
<tr><td>Rechne einzeln für "keinen Vokal", "genau einen" resp. "zwei Vokale".
Verteile zuerst die "T". NCr(7,2) Mögl., 2 Plätze von 7
Dann die Konsonanten. 19 Möglichkeiten, 5, 4 oder 3 mal mit Wiederholung.
Dann die Vokale. 6 Möglichkeiten, 0, 1 oder 2 mal mit Wh.
Die Vokale sind noch auf die Positionen zu verteilen.</td><td>
</td></tr>
</table>