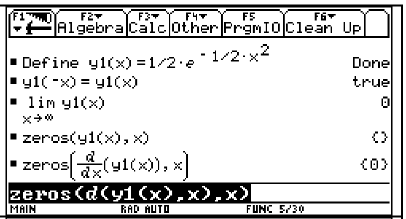
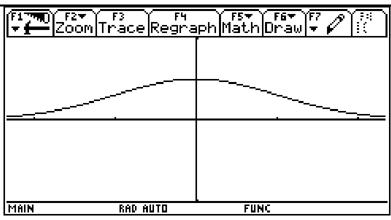
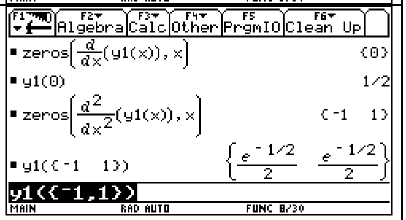
Lösung Matura 6J und 6K (2007)

Aufgabe 1a)

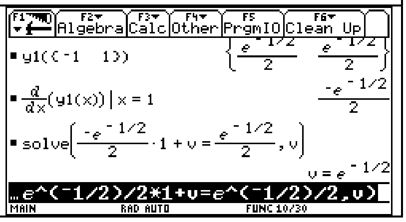
Definiere die Funktion.
D = R, Symmetrie: gerade Funktion, Asymptote y = 0
keine Nullstelle,
Maximum (0 | ½),2 Wendepunkte $\left(\pm 1 \,|\, \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$



Funktionsgraph: 

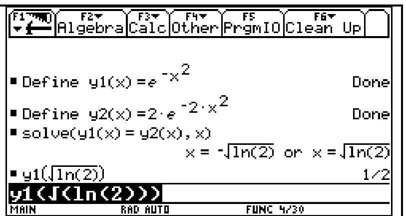


Rechne die Wendetangente für x = 1
$y_1'(1) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}} = m$
y = m x + v mit dem Wendepunkt eingesetzt.
Tangente $y = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot x + e^{-\frac{1}{2}}$

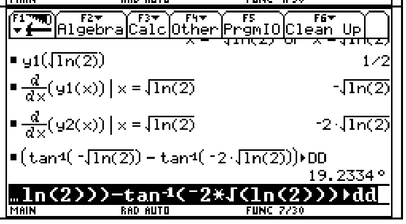


Aufgabe 1b)

Definiere die Funktionen.
Gleichsetzen ergibt den Schnittpunkt $S\left(\sqrt{\ln(2)} \,|\, \frac{1}{2}\right)$

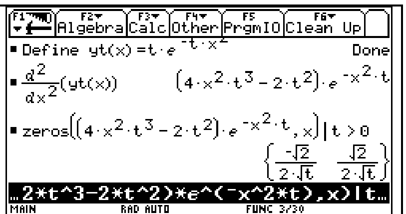


Steigungen rechnen,
dann die Differenz der Winkel über arc tan
Zwischenwinkel 19.2334°



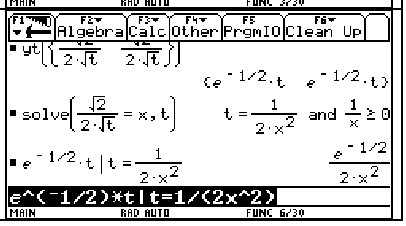
Aufgabe 1c)

Definiere yt(x) neu.
2. Ableitung bestimmen und = 0 setzen
Wendepunkte $P\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}} \,|\, e^{-1/2}\cdot t\right)$



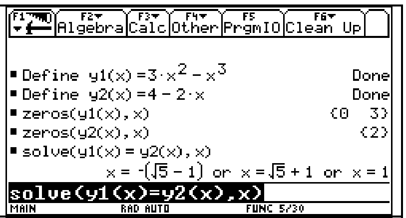
t eliminieren, d.h. $x = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}} \Rightarrow t = \frac{1}{2x^2}$ bei y einsetzen.

Kurve aller Wendepunkte: $y = \frac{e^{-1/2}}{2x^2}$

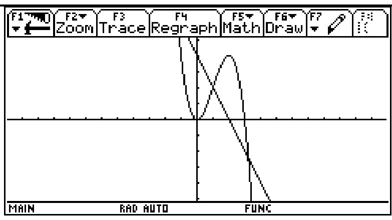


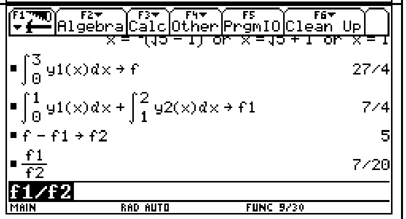
Aufgabe 2a)

Definiere die Funktionen und berechne die Nullstellen sowie die x-Koord. der Schnittpunkte.
Dabei ist nur x = 1 wichtig. Gesamtfläche F,
Teilfläche links F_1, Teilfläche rechts F_2
und das Verhältnis 7 : 20



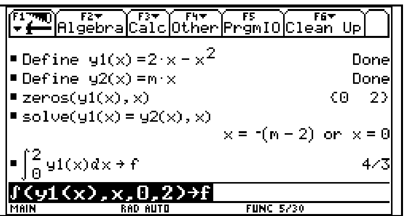
Graphen:



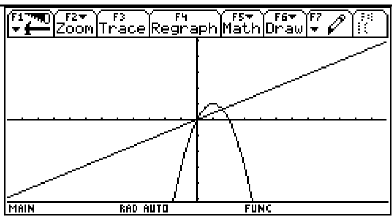


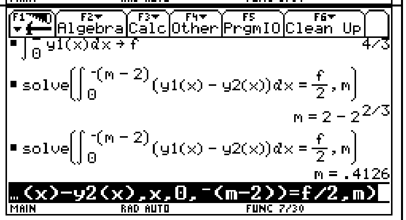
Aufgabe 2b)

Definiere die Funktionen (Ansatz y = mx für die Gerade) und berechne Nullstellen und x-Koord. der Schnittpunkte.
Gesamtfläche F. Die obere Teilfläche muss halb so gross sein.
Nach m auflösen. Somit Gleichung $y = \left(2 - 2^{\frac{2}{3}}\right) \cdot x$



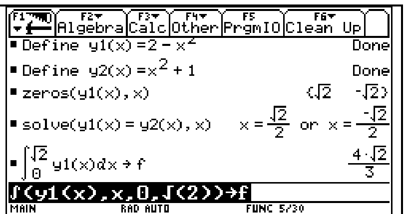
Graphen:



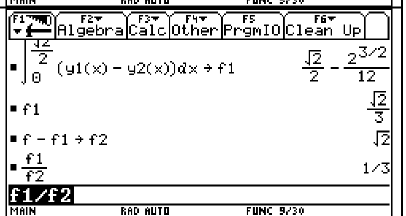


Aufgabe 2c)

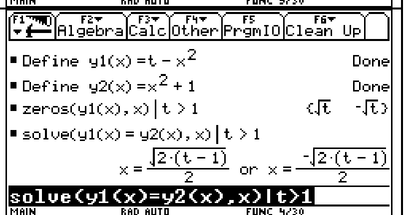
c1)
Definiere die Funktionen
Berechne die Nullstelle sowie die x-Koord. des Schnittpunktes
Gesamtfläche F,



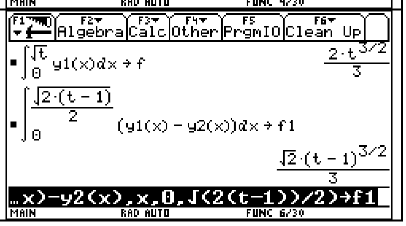
Teilfläche F_1, (interessanterweise vereinfacht der Rechner das Resultat zuerst nicht),
Teilfläche F_2 und das Verhältnis 1 : 3.

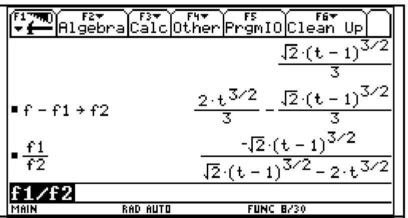
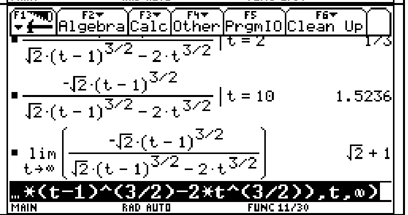
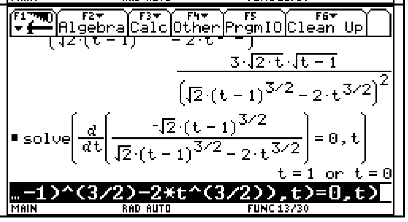


c2)
Dasselbe allgemein:
Nullstelle, x-Koord. des Schnittpunktes



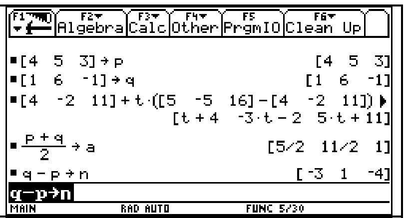
Gesamtfläche F,
obere Teilfläche F_1



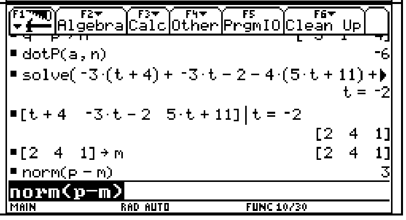
<table>
<tr><td>untere Teilfläche F_2 und das Verhältnis.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c3)
Für t = 2 erhält man den Wert aus Aufgabe c1).
Je grösser t wird, desto grösser wird das Verhältnis.
Also muss t nach unendlich gehen und man erhält das Supremum bei einem Verhältnis von $\left(\sqrt{2}+1\right):1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Wer das allg. Verhältnis nach t ableitet und gleich Null setzt, erhält nur die nicht gestatteten Werte t = 1 und t = 0.
Somit gibt es hier kein Maximum.
(Das war nicht verlangt.)</td><td>
</td></tr>
</table>

Aufgabe 3a)

Speichere die Punkte.
Mittelnormalebene von PQ

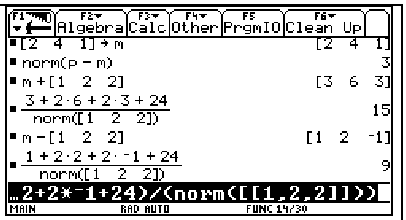


$-3x + y - 4z + 6 = 0$
mit g schneiden, ergibt M.
r = Abstand von M zu P (oder Q).
Kugelgleichung $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 9$



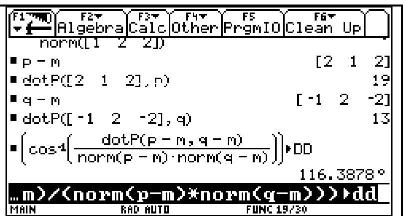
Aufgabe 3b)

Der Normalenvektor von ε ist [1, 2, 2], hat Länge 3 und ist somit gleich lang wie der Kugelradius. Also diesen Vektor in M anhängen (beide Richtungen) und mit HNF schauen, welcher Punkt näher liegt.
K(1 | 2 | –1) hat Abstand 9 zur Ebene.
Man kann auch von M das Lot auf die Ebene legen, mit der Kugel und der Ebene schneiden und dann die kürzere Entfernung suchen.

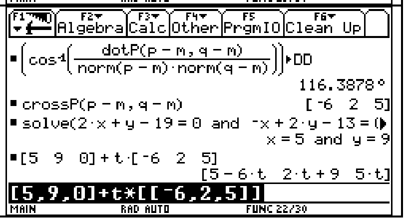


Aufgabe 3c)

Tangentialebene in P: $2x + y + 2z - 19 = 0$
und in Q: $-x + 2y - 2z - 13 = 0$
Zwischenwinkel = Winkel zwischen den Normalenvektoren MP und MQ. 116.39° resp. 63.61°

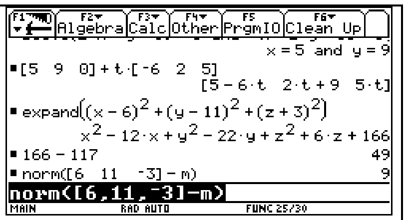


Schnittgerade: Richtungsvektor = MP × MQ
Für einen Punkt setze z = 0 und löse auf.
S(5 | 9 | 0), also Schnittgerade siehe unterste Linie



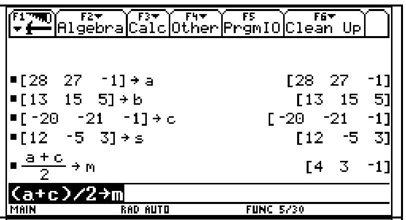
Aufgabe 3d)

Quadratisches Ergänzen (von Hand)
Die zweite Kugel hat die Gleichung
$(x-6)^2 + (y-11)^2 + (z+3)^2 = 49$
Also $M_2(6 \mid 11 \mid -3)$ und $r_2 = 7$.
Der Abstand der Kugelzentren ist 9; $r_1 + r_2 = 10$
Somit schneiden sich die Kugeln.

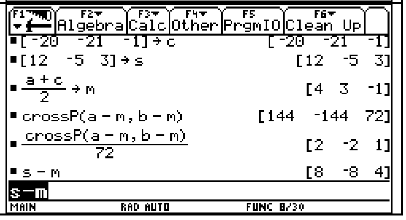


Aufgabe 4a)

Speichere die Punkte und berechne den Mittelpunkt M

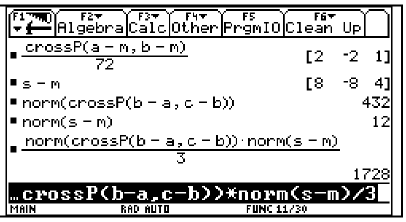


Der Vektor MS ist der Normalenvektor auf die Ebene ABC. Man kann hier schon die Koordinatengleichung der Ebene ABC berechnen und das Lot von S auf diese Ebene bilden. Der Lotfusspunkt ist dann M.
Oder auch mit Skalarprodukt (MA ist senkrecht zu MS)



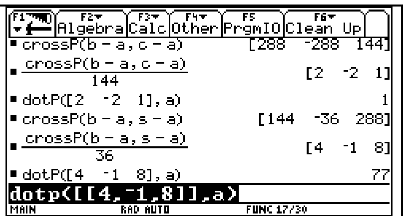
Aufgabe 4b)

"Grundfläche mal Höhe durch 3"

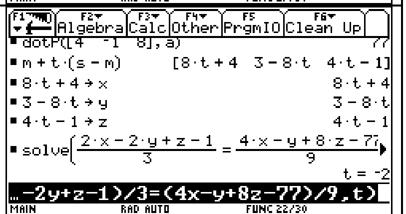


Aufgabe 4c)

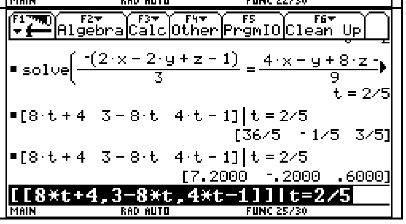
Ebene ABC: $2x - 2y + z - 1 = 0$
Ebene ABS: $4x - y + 8z - 77 = 0$



HNF's gleichsetzen und mit der Geraden MS schneiden



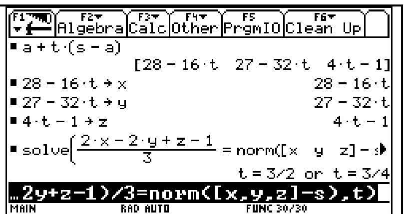
$t = -2$ ist die Lösung ausserhalb der Strecke MS, also liegt der Punkt auf der negativen Seite einer der beiden Ebenen.
Vorzeichen dazufügen, $t = 2/5$ einsetzen.
P(7.2 | –0.2 | 0.6)

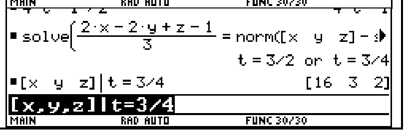


Aufgabe 4d)

Speichere Q(x | y | z) neu für die Strecke AS.
Abstand zur Ebene ABC (mit HNF) gleich Länge des Vektors QS setzen.
Auflösen lassen.

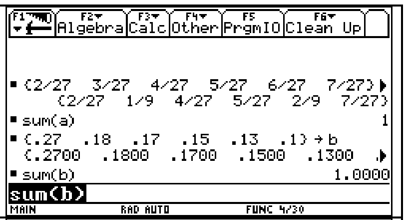
Auch hier ist nur der Wert $t < 1$ sinnvoll.
Q(16 | 3 | 2)



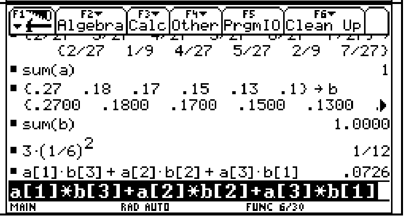


Aufgabe 5a)

Zunächst speichern wir die Listen



Summe 4 erhält man 4 = 1 + 3 = 2 + 2 + 3 = 1.
Für Mr X ist somit die W'keit 1/12 = 0.0833
Für Mr Y beträgt sie 0.0726
Somit ist Mr X im Vorteil.

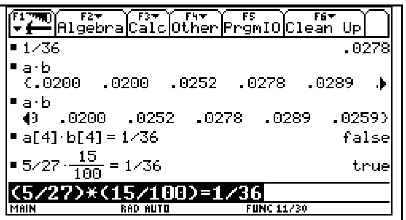


Aufgabe 5b)

Die W'keit für jedes Pasch beträgt für Mr X 1/36 = 0.0278
Für Mr Y sieht man die W'keiten aus dem Ausdruck

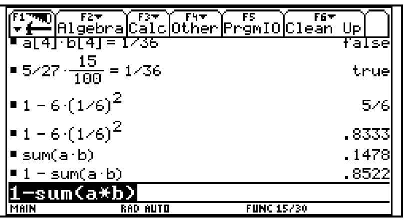
- Für Mr X ist die 1 oder die 2 optimal, denn dann ist die W'keit von Mr Y minimal
- Für Mr Y ist die 5 optimal, denn dann hat er die grösste Gewinn-W'keit
- Der Schiedsrichter entscheidet sich für die 4. Dann ist das Spiel fair.

(Aber der Rechner erkennt nicht, dass 5/27*0.15 = 1/36 ist.)



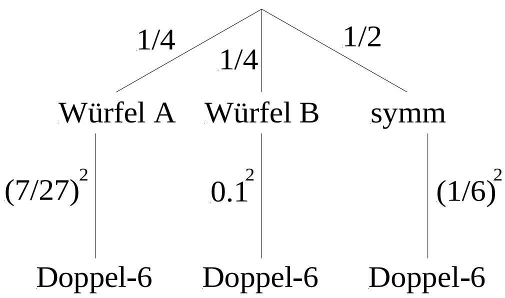
Aufgabe 5c)

Für Mr X ist die W'keit für kein Pasch
1 – 6(1/36) = 5/6 = 0.8333
Für Mr Y ist die W'keit 0.8522
Somit ist hier Mr Y im Vorteil.

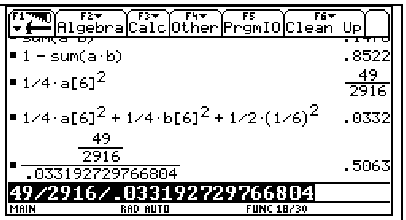


Aufgabe 5d)

Der Baum für die bedingte W'keit sieht so aus:

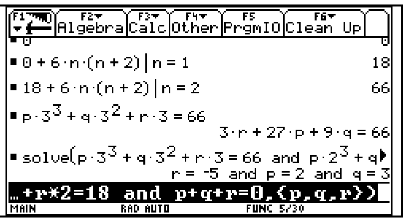


Einsetzen in "P(A | B) = P(A ∩ B) / P(B)"
ergibt die W'keit 0.5063



Aufgabe 6a)

$a_2 = 18$ und $a_3 = 66$ berechnen.
Alles in die Form der expliziten Def. einsetzen und auflösen lassen.
$p = 2$, $q = 3$, $r = -5$.



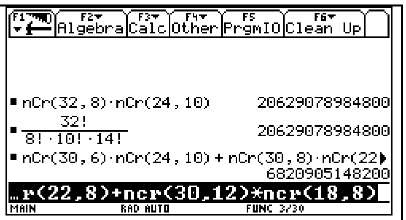
Aufgabe 6b)

Das Eintippen der Resultate ist weniger wichtig als die Lösungsidee

1. Frage: $\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{10} = \frac{32!}{8! \cdot 10! \cdot 14!}$

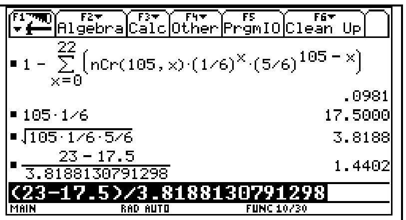
2. Frage: Rechne dreimal einzeln, je nachdem wo Asterix und Obelix übernachten.

$\binom{30}{6} \cdot \binom{24}{10} + \binom{30}{8} \cdot \binom{22}{8} + \binom{30}{12} \cdot \binom{18}{8}$



Aufgabe 6c)

H_0: $p = 1/6$. H_1: $p > 1/6$ (die "2" ist viel zu häufig)
Binomalverteilt $X \geq 23$ ist der Verwerfungsbereich.
Rechne über das Gegenteil.
$s = 0.0981$, H_0 beibehalten.
Der Würfel kann nicht als asymmetrisch angesehen werden.
Oder normalverteilt.
$\mu = 17.5$, $\sigma = 3.819$, $z = 1.44$, $\Phi(z) = 0.0749$
H_0 beibehalten.
Im Unterricht nicht behandelt:
Weshalb hier der Fehler zwischen Normalverteilung und Binomialverteilung relativ gross ist.



Aufgabe 6d)

Indikatoren:
X_1: 0 1 besagt, ob Schellen vorkam oder nicht.
$p = 0.9502$
X_2 bis X_4 analog.
$E(X) = 4 \cdot E(X_1) = 3.8$
Durchschnittlich wird man 3.8 verschiedene Farben haben.