

Mathematik

Klasse 6G

O. Riesen

1. Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{x^3 + 14x^2 - 12x + 16}{4x^2}$.

- Führe eine Kurvendiskussion durch. Verlangt werden:
 - Definitionsbereich, Asymptoten;
 - Koordinaten der speziellen Kurvenpunkte (Nullstelle, Extremum, Wendepunkt);
 - die Gleichung der Wendetangente.
- Die Kurve schneidet die schräge Asymptote. Bestimme diesen Schnittpunkt und dort den Schnittwinkel (zwischen der Funktionskurve und der Asymptoten).
- Von einem Kurvenpunkt $P(t | f(t))$ im I. Quadranten zeichnet man die Lote auf die Koordinatenachsen. Dadurch entsteht ein Rechteck, von dem eine Ecke in P und eine andere im Koordinatenursprung liegt. Wo muss P sein, damit das Rechteck minimale Fläche erhält?

2. Drei Beweisaufgaben für eine Kurvenschar

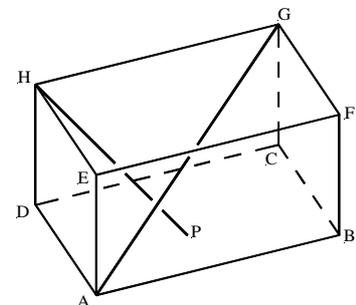
Gegeben ist die Kurvenschar $y = f_t(x) = \frac{t-x}{\sqrt{t^2+x^2}}$. Für die ganze Aufgabe gilt $t > 0$.

Hinweise: Es könnte nützlich sein, sich die Kurven für die Werte $t = 1, 2, 3, 4$ im Taschenrechner anzeigen zu lassen. Die Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

- Weise nach, dass alle Kurven der betrachteten Schar sich in einem Punkt schneiden.
- Die y-Koordinaten der Wendepunkte können (unabhängig vom Wert von t) genau zwei Werte annehmen. Man beweise das.
- Betrachte die Kurventangenten in den Nullstellen dieser Kurven. Zeige, dass alle diese Kurventangenten sich in einem Punkt schneiden.

3. Lichtstrahlen in einem Quader

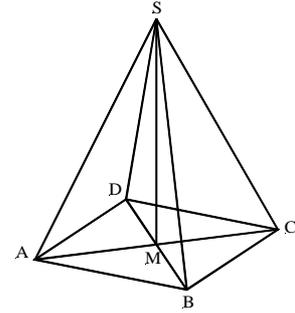
In einem Quader (siehe die Figur) sind zwei Lichtstrahlen gegeben. Der erste Lichtstrahl geht von $A(3 | 2 | 8)$ nach $G(16 | -18 | 4)$, der zweite Lichtstrahl geht von $H(10 | 3 | 1)$ nach $P(4 | -3 | 7)$. P liegt in der Ebene ABCD.



- Wie nahe kommen sich die beiden Lichtstrahlen? (Berechne den kürzesten Abstand.)
- Weise nach, dass die Ebene ABCD die Koordinatengleichung $4x + y - z - 6 = 0$ hat.
- In welchem Winkel trifft der Lichtstrahl HP auf die Ebene ABCD?
- Der Lichtstrahl HP wird an der Ebene ABCD reflektiert. In welchem Punkt trifft der reflektierte Strahl auf die Ebene ABFE?

4. Pyramide mit Inkugel

Von der Pyramide gemäss nebenstehender Figur kennt man alle Eckpunkte, nämlich $A(14 \mid 13 \mid -2)$, $B(8 \mid 1 \mid -14)$, $C(-4 \mid -5 \mid -2)$, $D(2 \mid 7 \mid 10)$ und $S(13 \mid -4 \mid 2)$. Die Pyramide hat eine Inkugel, welche alle 5 Seitenflächen berührt.



a) Vorbereitungsarbeiten: Weise nach, dass es sich um die Eckpunkte einer geraden quadratischen Pyramide handelt, d.h. zeige, dass ABCD ein Quadrat ist und dass SM auf die Ebene ABCD senkrecht steht. Bestimme ausserdem die Koordinatengleichung der Ebene ABS.

b) Berechne die Oberfläche der Pyramide (inkl. Boden).

c) Berechne das Zentrum Z der Inkugel.

[Wer c) nicht löst, darf mit dem Ersatzwert $Z(-7 \mid 16 \mid -8)$ weiter arbeiten.]

d) Bestimme die Gleichung der Inkugel sowie den Berührungspunkt der Inkugel mit der Ebene ABS.

5. Kugeln ziehen

Gegeben ist ein (symmetrischer) Würfel und eine Kiste, welche 15 rote und 45 weisse Kugeln enthält. Wir führen folgenden Zufallsversuch durch:

Zuerst wirft man den Würfel, danach zieht man, je nach Ergebnis des Wurfes, aus der Kiste zufällig 8 Kugeln. Wenn der Würfel eine "1" oder eine "6" zeigt, dann zieht man *mit* Zurücklegen, andernfalls zieht man *ohne* Zurücklegen.

a) Spieler A hat mit dem Würfel eine "1" geworfen: mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er danach mindestens 5 rote Kugeln?

b) Spieler B hat mit dem Würfel eine "4" geworfen: mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er danach weniger als 4 rote Kugeln?

c) Spieler C hat genau 5 rote Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er vorher eine "6" gewürfelt hat?

d) Wie gross ist in diesem Zufallsversuch insgesamt die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 der gezogenen Kugeln rot sind?

e) Die Zufallsgrösse X bezeichnet die Anzahl gezogener roter Kugeln. Berechne $E(X)$. Hinweis: Verallgemeinere zunächst das Ergebnis von Teilaufgabe d) auf genau n gezogene rote Kugeln.

6. Kurzaufgaben aus verschiedenen Gebieten

a) Technik des Integrierens

Berechne $\int_1^8 (x-4) \cdot \ln(x) dx$.

Das Integral ist ausführlich "von Hand" (d.h. ohne Taschenrechner) herzuleiten, so dass alle Rechenschritte ersichtlich sind.

b) Radiosender

Der Radiosender "RadioX" behauptet, bei 70% der Bevölkerung bekannt zu sein. In einer Umfrage wurden 2486 Personen befragt, jedoch gaben nur 1703 Personen an, den Radiosender "RadioX" zu kennen. Ist mit diesem Ergebnis die Behauptung des Radiosender statistisch haltbar? Begründe genau. ($\alpha = 5\%$)

c) Komplexe Zahlfolge

Eine komplexe Zahlfolge ist wie folgt definiert: $a_1 = -2 + 8i$; $a_{n+1} = \frac{i}{2} \cdot a_n + 5i$.

Bestimme zunächst die Folgenglieder a_2 , a_3 , a_4 und a_5 .

Die explizite Definition dieser Folge hat die Form $a_n = p + t \cdot q^n$.

Bestimme p , q und t .
