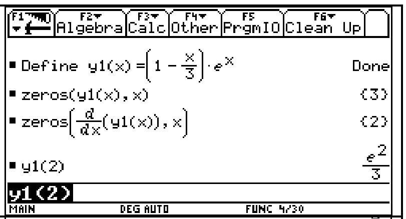
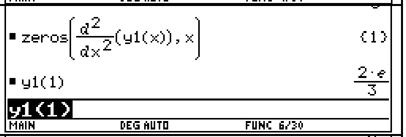
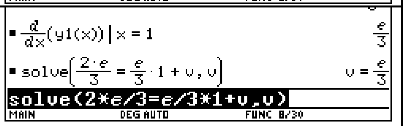
Lösung Matura 6C (2010)

Aufgabe 1a)

Definiere die Funktion. Nullstelle (3 | 0) Maximum $\left(2 \mid \frac{e^2}{3}\right)$.	
Wendepunkt $\left(1 \mid \frac{2e}{3}\right)$ Der Funktionsgraph ist bei Teilaufgabe c) ersichtlich	
Gleichung der Wendetangente: $y = \frac{e}{3}x + \frac{e}{3}$	

Aufgabe 1b)

"von Hand" zu lösen:

Partielle Integration mit $u'(x) = e^x$, $v(x) = 1 - x/3$ und somit $u(x) = e^x$, $v'(x) = -1/3$

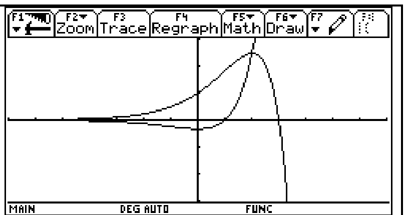
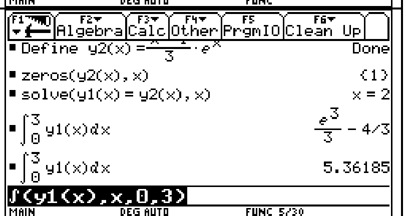
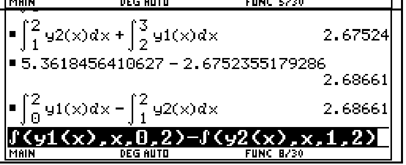
$$\int_0^3 (1-\frac{x}{3}) \cdot e^x \, dx = (1-\frac{x}{3}) \cdot e^x \Big|_0^3 - \int_0^3 -\frac{1}{3} \cdot e^x \, dx .$$

Das ergibt $\int_0^3 (1-\frac{x}{3}) \cdot e^x \, dx = (1-\frac{x}{3}) \cdot e^x + \frac{1}{3} \cdot e^x \Big|_0^3 = (1-\frac{3}{3}) \cdot e^3 + \frac{1}{3} \cdot e^3 - \left((1-\frac{0}{3}) + \frac{1}{3}\right)$.

Der erste Summand wird = Null, von der unteren Grenze erhält man 4/3.

Folglich beträgt die gesuchte Fläche $\frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}$.

Aufgabe 1c)

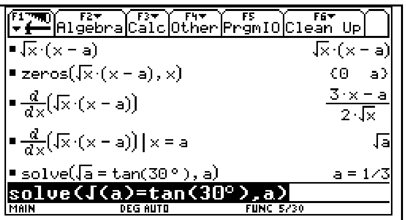
Die Figur zeigt die Situation mit den beiden Kurven. Die Nullstelle (3 | 0) hat man schon.	
$y = g(x) = \frac{x-1}{3} \cdot e^x$ hat die Nullstelle (1 | 0) Der Schnittpunkt der Kurven liegt bei x = 2. Die Gesamtfläche (siehe auch Aufgabe b) beträgt 5.362	
Die rechte Teilfläche (zwei Integrale) beträgt 2.675. Die linke Teilfläche kann man aus der Gesamtfläche minus rechte Teilfläche oder aus zwei Integralen zusammensetzen. Die linke Teilfläche beträgt 2.687 und ist somit grösser.	

Aufgabe 2a)

Nullstelle x = a (abgesehen von x = 0)

$f'(x)=\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}$ und somit $f'(a)=\sqrt{a}$

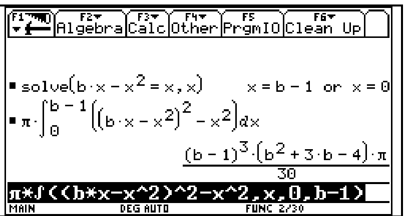
Aus $f'(a)=\tan(30°)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ folgt a = 1/3.



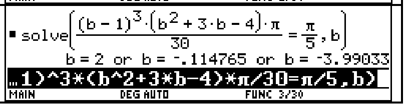
Aufgabe 2b)

Schnittpunkte x = 0 resp. x = b – 1.

$$V=\pi\cdot\int_0^{b-1}((b\cdot x-x^2)^2-x^2)dx=\pi\cdot\frac{(b-1)^3(b^2+3b-4)}{30}=\frac{\pi}{5}$$



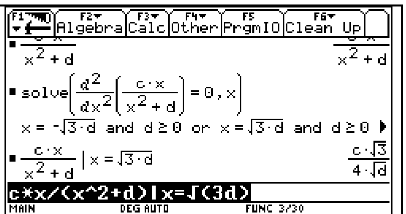
und daraus folgt b = 2.
(die anderen Lösungen für b sind negativ)



Aufgabe 2c)

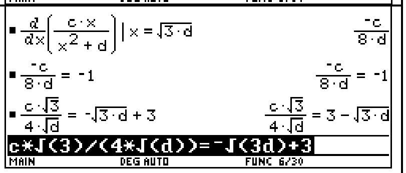
Wendepunkt $x_W=\pm\sqrt{3d}$ und somit $y_W=\frac{\sqrt{3}\cdot c}{4\sqrt{d}}$

Rechne mit $x_W=\sqrt{3d}$

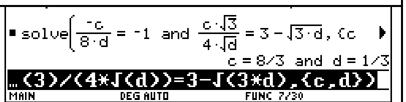


Nun muss f'(x_W) = –1 (= Steigung der Wendetangente) sein, also $\frac{-c}{8d}=-1$.

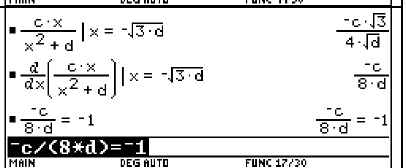
Weiter erfüllen die Wendepunktskoordinaten die Gleichung der Wendetangente, also $y_W = -x_W + 3$, somit $\frac{\sqrt{3}\cdot c}{4\sqrt{d}}=3-\sqrt{3d}$



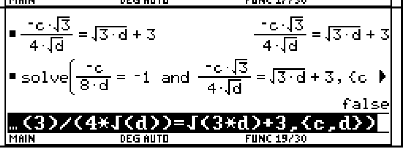
auflösen ergibt c = 8/3 und d = 1/3.



Zusatz: Wenn man den anderen Wendepunkt nimmt, also $x_W=-\sqrt{3d}$,

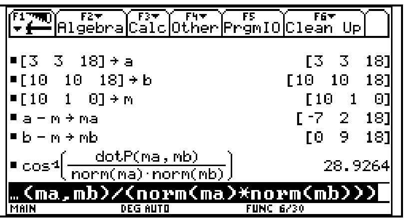


dann hat das Gleichungssystem keine Lösung.



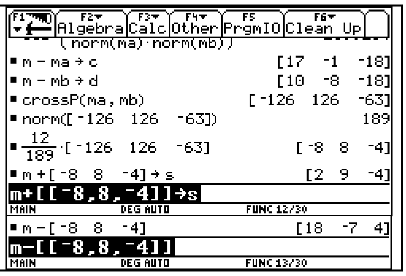
Aufgabe 3a)

Speichere die Punkte.
Bestimme die Richtungsvektoren MA, MB.
(Im Text stehen die Vektorpfeile nie.)
In die Formel einsetzen, ergibt ε = ∠(AMB) = 28.926°



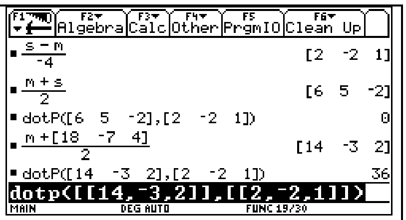
Aufgabe 3b)

MA umkehren und in M anhängen: C(17 | –1 | –18)
MB ebenso: D(10 | –8 | –18)
Das Vektorprodukt von MA mit MB zeigt in Richtung von MS, ist aber noch zu lang. Kürzen auf Länge 12 und in M anhängen: S(2 | 9 | –4)
Alternativlösung: S(18 | –7 | 4)



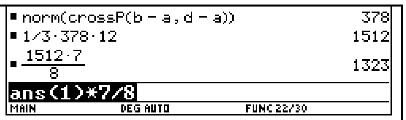
Aufgabe 3c)

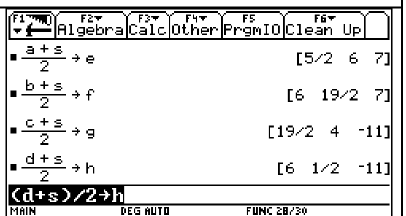
MS ist Normalenvektor. Der Mittelpunkt von MS (6 | 5 | –2) liegt in der gesuchten Ebene:
2x – 2y + z = 0
Alternativlösung: Mittelpunkt (14 | –3 | 2)
2x – 2y + z – 36 = 0
Zusatz: Man kann auch einen Punkt E, F, G, H der Deckfläche des Pyramidenstumpfs rechnen, und einsetzen.



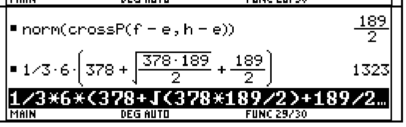
Aufgabe 3d)

Berechne die Bodenfläche ABCD: 378
Das Volumen der gesamten Pyramide beträgt 1512.
Folgende Überlegung führt am einfachsten zum Ziel:
Weil von der weggeschnittenen Pyramide die Seiten und die Höhe halbiert wird, ist das Volumen der weggeschnittenen Pyramide 1/8 der gesamten Pyramide, somit bleiben 7/8 der Pyramide. Das macht V = 1323.



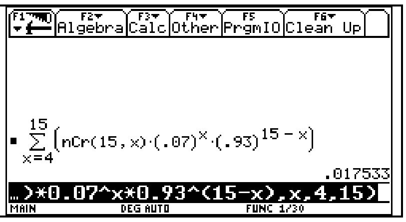


Man kann auch in die Formel für den Pyramidenstumpf einsetzen. Die Deckfläche EFGH hat eine Fläche von 94.5



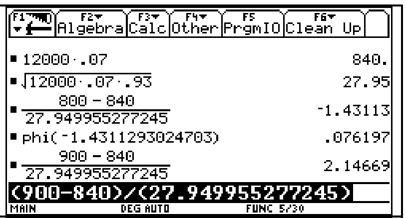
Aufgabe 4a)

Binomialverteilung
1.75 %

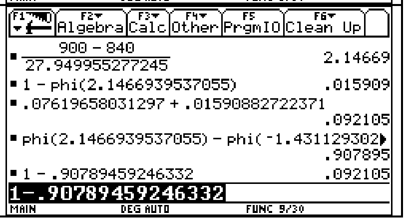


Aufgabe 4b)

Normalverteilung
$\mu = 840$, $\sigma = 27.95$
z-Werte –1.43 resp. 2.15.

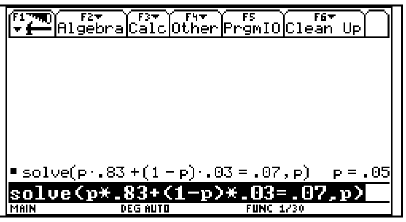


Entweder für die zu kleinen resp. zu grossen Werte einzeln rechnen, oder zwischen 800 und 900 pos. Ergebnisse und dann das Gegenteil berechnen.
Gesuchte W'keit: 9.21 %



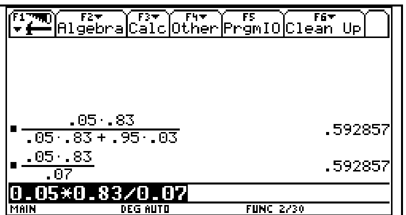
Aufgabe 4c)

Hier könnte ein Baumdiagramm ev. hilfreich sein.
Gesuchte W'keit p.
Kranke Person: 0.83·p, gesunde Person: 0.03·(1 – p)
Totale W'keit 7%
Also p = 5%

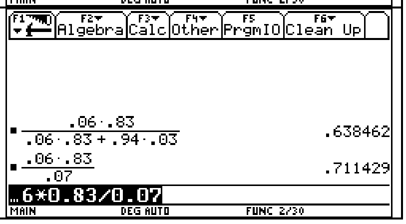


Aufgabe 4d)

Bedingte W'keit
A: Mr. X ist erkrankt
B: Testergebnis positiv. P(B) = 0.07 kann man übernehmen.
P(A | B) = 59.29%

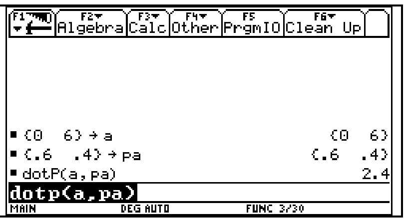


Mit Ersatzwert:
Wer das Baumdiagramm durchzeichnet, erhält 63.85%
Wer P(B) = 0.07 aus dem ersten Teil der Aufgabe übernimmt, erhält 71.14%



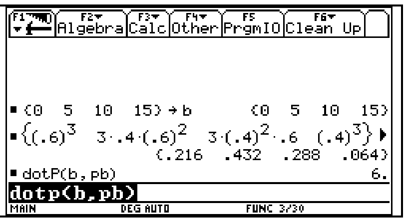
Aufgabe 5a)

Der Gaukler wird 2.40 Fr. als Einsatz verlangen.



Aufgabe 5b)

Gaukler B wird 6 Fr. Einsatz verlangen.
Verteilungstabelle einer Binomialverteilung. $n = 3$, $p = 0.4$
Hier ist $b = 5$

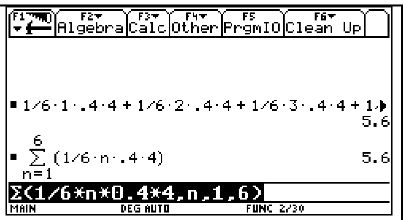


Aufgabe 5c)

Einsatz = $n \cdot p \cdot b$
(Das funktioniert auch für Gaukler A mit $n = 1$, $p = 0.4$ und $b = 6$.)

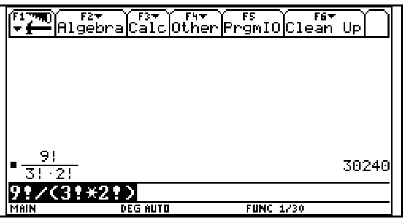
Aufgabe 5d)

Hier hat man einen Baum mit 6 Pfaden.
Entweder rechnet man durch, oder man verwendet das Summenzeichen.
Der Gaukler wird 5.60 Fr. als Einsatz verlangen.
(Teil d geht nur, wenn man die "Formel" aus c) gefunden und verstanden hat.)



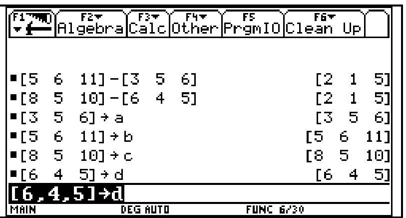
Aufgabe 6a)

Klassisches MISSISSIPPI-Problem

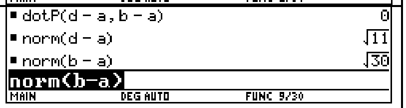


Aufgabe 6b)

Der Differenzvektor von den ersten zwei Punkten und der Differenzvektor von den letzteren zwei sind gleich. Damit ist es sicher schon ein Parallelogramm.
Also ist die Reihenfolge auf dem Prüfungsblatt beispielsweise A, B, D, C.

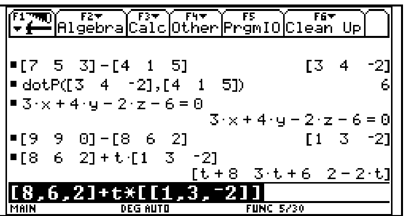


Das Skalarprodukt von AB mit AD ergibt Null.
Damit ist es ein Rechteck.
Zusatz: AB und AD sind nicht gleich lang. Es ist also kein Quadrat.

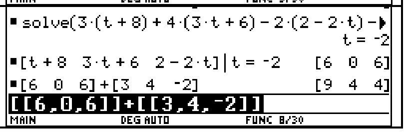


Aufgabe 6c)

Bestimme eine Ebene durch A, senkrecht auf AD.
$3x + 4y – 2z – 6 = 0$.
B muss in dieser Ebene liegen.

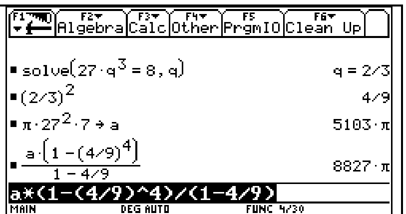


Also g mit dieser Ebene schneiden.
B(6 | 0 | 6)
AD = BC, folglich D(9 | 4 | 4)

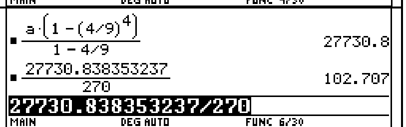


Aufgabe 6d)

Das q für die Radien beträgt 2/3.
Folglich ist das q für die Volumina $4/9 = (2/3)^2$, weil die Höhen gleich bleiben.
Einsetzen in die Summenformel ergibt das Gesamtvolumen.



Das Gesamtvolumen durch 270 teilen.
Es reicht also für 102 Personen.



Zusatz: Man kann auch $r_2 = 18$ und $r_3 = 12$ rechnen und dann die vier Zylindervolumen aufsummieren.