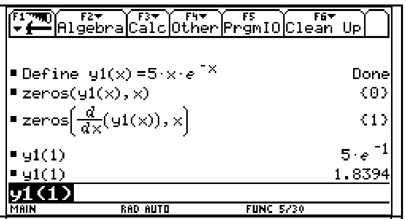
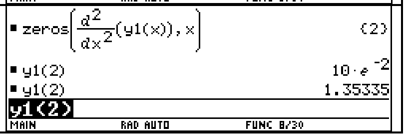
Lösung Matura 6B und 6E (2011)

Aufgabe 1a)

Definiere die Funktion.
Nullstelle (0 | 0)
Maximum $(1\,|\,5\cdot e^{-1}) = (1\,|\,1.839)$.



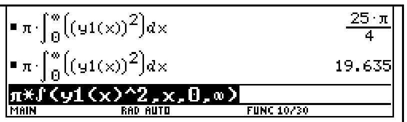
Wendepunkt $(2\,|\,10\cdot e^{-2}) = (2\,|\,1.353)$



Aufgabe 1b)

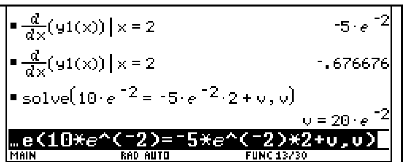
Rotationsvolumen

$$V = \frac{25\cdot\pi}{4} = 19.635$$

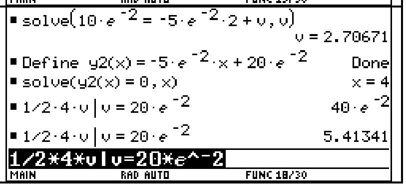


Aufgabe 1c)

Den Wendepunkt hat man schon: $(2\,|\,10\cdot e^{-2}) = (2\,|\,1.353)$
Steigung der Wendetangente: $m = -5\cdot e^{-2} = -0.677$
y-Achsenabschnitt: $v = 20\cdot e^{-2} = 2.707$

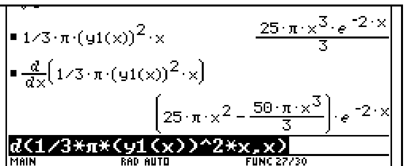


Wendetangente: $y = -5\cdot e^{-2}\cdot x + 20\cdot e^{-2}$
Nullstelle der Wendetangente: x = 4.
Fläche des Dreiecks: $40\cdot e^{-2} = 5.413$



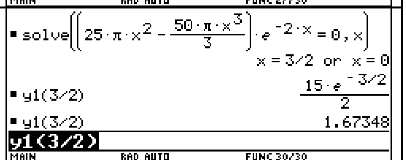
Aufgabe 1d)

Höhe des Kegels: x, Bodenradius des Kegels: $y_1(x)$
Alles in die Volumenformel einsetzen.
V' berechnen.

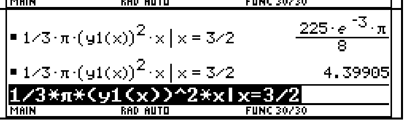


V' = 0, folglich x = 3/2.

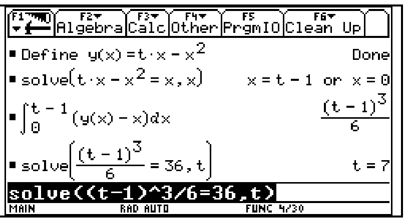
$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15\cdot e^{-\frac{3}{2}}}{2}\text{, somit } P\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{15\cdot e^{-\frac{3}{2}}}{2}\right) = P(1.5\,|\,1.673)$$



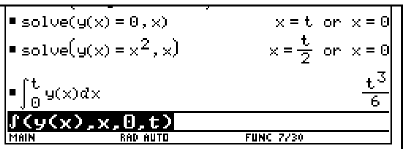
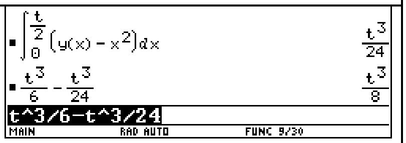
Maximales Volumen: $V_{max} = \frac{225\cdot e^{-3}\cdot\pi}{8} = 4.399$



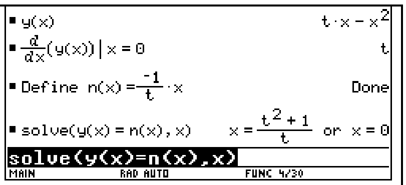
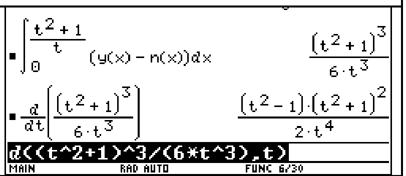
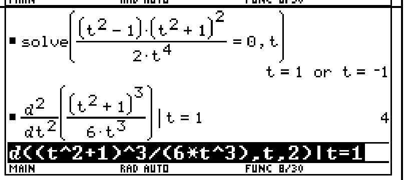
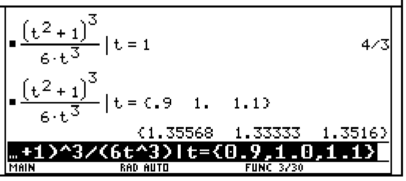
Aufgabe 2a)

Definiere die Funktion. Setze y(x) = x für die Schnittpunkte = Integrationsgrenzen. Berechne das Integral, setze = 36 und löse nach t auf. t = 7.	

Aufgabe 2b)

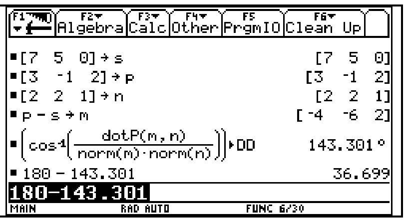
Bestimme die Nullstellen: (0 | 0) und (t | 0) Schnittpunkte: (0 | 0) und (t/2 | ...) [Der y-Wert des zweiten Schnittpunkts ist bedeutungslos.] Totalfläche: $F_1 + F_2 = \frac{t^3}{6}$	
Linke Teilfläche: $F_1 = \frac{t^3}{24}$ Die linke Teilfläche ist ¼ der Gesamtfläche. Das Verhältnis beträgt somit 1 : 3 (unabhängig von t).	

Aufgabe 2c)

Berechne die Steigung der Kurve und damit die Steigung der Kurvennormalen. Gleichung der Normalen: $y = -\frac{1}{t} \cdot x$ Gleichsetzen der Kurve und der Normalen gibt die x-Koordinate des anderes Schnittpunkts.	
Berechne dann die Fläche. F' berechnen ...	
... und F' = 0 setzen. Somit wird t = 1, weil t > 0 sein muss. Weil F''(1) = 4 > 0 ist, handelt es sich um ein Minimum. (Nicht verlangt, weil schon entsprechend in Aufgabe 1d vorgekommen: Die minimale Fläche beträgt 4/3)	
Oder man berechnet F(1) und dazu zwei daneben liegende Werte von F(t). Dann erkennt man auch, dass F(1) = 4/3 ein Minimum ist.	

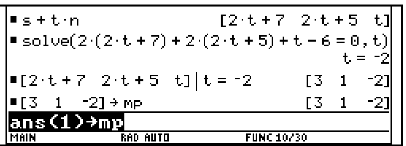
Aufgabe 3a)

Speichere die Punkte.
Bestimme die Richtungsvektoren von n und m.
n ist der Normalenvektor auf die Ebene ε.
(Im Text stehen die Vektorpfeile nie.)
In die Formel einsetzen, ergibt $\alpha = 36.699°$

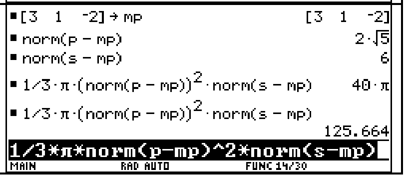


Aufgabe 3b)

Schneide h mit ε: Startpunkt S, Richtung n.
M(3 | 1 | –2)

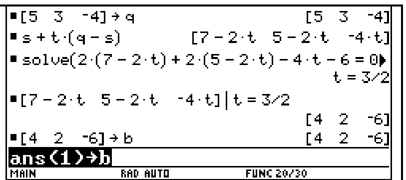


||MP|| ist der Radius r = $2\cdot\sqrt{5}$ = 4.472
||MS|| ist Höhe des Kegels h = 6.
Alles in die Volumenformel einsetzen.
V = $40\cdot\pi$ = 125.664

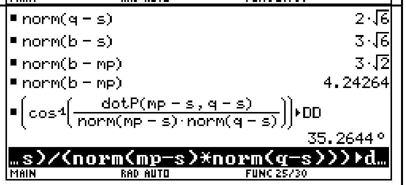


Aufgabe 3c)

Speichere Q.
Bilde die Gerade SQ und schneide sie mit ε.
Der Schnittpunkt sei B, dann ist B(4 | 2 | –6).

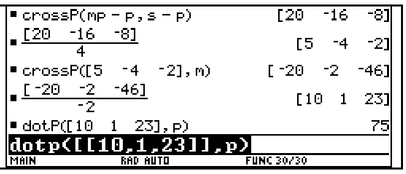


||QS|| < ||BS||, somit liegt Q zwischen S und B.
Variante I: ||BM|| = 4.243 ist kleiner als der Radius r.
Variante II: Der Winkel zwischen SM und SQ beträgt 35.26° und ist kleiner als α.



Aufgabe 3d)

Bestimme zuerst die Richtung der Kreistangente:
PM × PS = $[5 , -4 , -2]^T$
r_t × PS = n_{TE} = $[10, 1, 23]^T$
somit $10x + y + 23z - 75 = 0$.

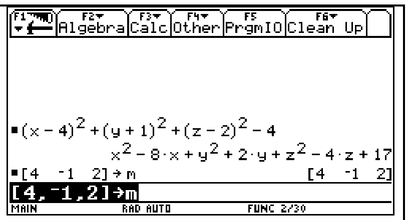


Aufgabe 4a)

Quadratisches Ergänzen

M(4 | –1 | 2), $r_1 = 2$

Für den Ersatzwert gibt es ab hier die gleichen Resultate (das Ersatz-Zentrum liegt auf der anderen Seite von g).

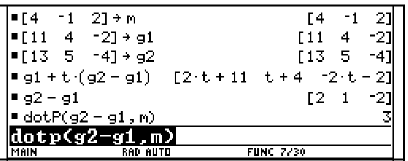


Aufgabe 4b)

B ist der Lotfusspunkt von M auf g.

Richtungsvektor von g: $r_g = [2, 1, –2]^T$ und somit die Normalebene auf g durch M.

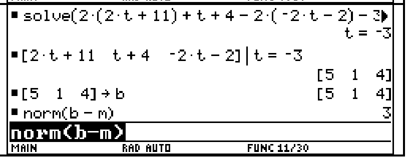
NE: 2x + y – 2z – 3 = 0.



Mit g schneiden, ergibt B.

B(5 | 1 | 4)

$r_2 = ||MB|| = 3$

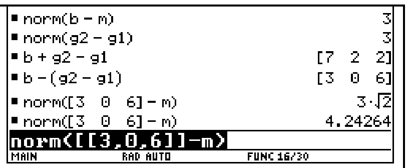


Aufgabe 4c)

B ist der Mittelpunkt der gesuchten Strecke. Weil $||r_g|| = 3$, kann man r_g in beide Richtungen an B anhängen und erhält P und Q.

P(7 | 2 | 2), Q(3 | 0 | 6)

$r_3 = 3 \cdot \sqrt{2} = 4.243$



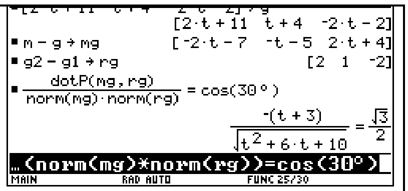
Andere Variante: $||MB|| = ||\, [1, 2, 2]^T \,|| = 3$.

Dann erhält man r_3 mit Pythagoras (MBP und MBQ sind Geo-Dreiecke) und kann g mit einer Kugel k_3 um M mit Radius r_3 schneiden.

Gleichung der Kugel k_3: $(x – 4)^2 + (y + 1)^2 + (z – 2)^2 = 18$.

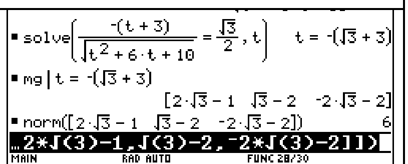
Aufgabe 4d)

Gesucht ist ein Punkt R auf g so, dass sich g und MR im Winkel 30° schneiden. Weil MR der Normalenvektor auf die Tangentialebene in R ist, schneidet dann g diese Ebene im Winkel 60°. Dann entsteht ein halbes gleichseitiges Dreieck MBR. Somit ist $r_4 = 2r_2 = 6$.



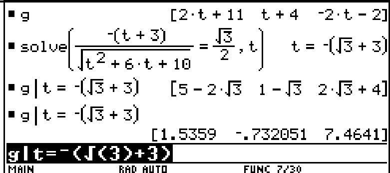
Andere Variante: G(2t + 11 | t + 4 | –2t – 2) ist ein Punkt auf g. Finde G so, dass GM und r_g in einem Winkel von 30° zueinander stehen.

Dann ist G im Output sichtbar und ||GM|| = 6.

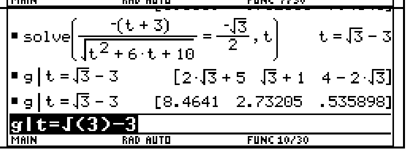


Näherungswerte für die beiden möglichen Punkte G:

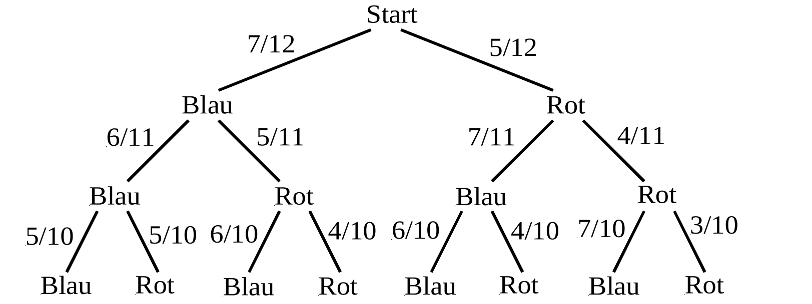
G(1.536 | –0.732 | 7.464)



G(8.464 | 2.732 | 0.536)

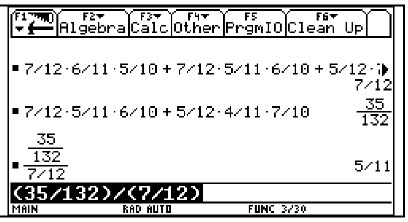


Aufgabe 5a)



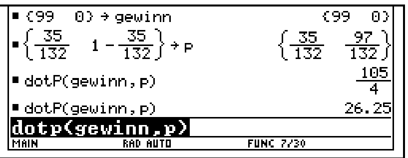
Aufgabe 5b)

Dritte Kugel blau: jeder zweite Pfad. P(B) = 7/12
Zweite Kugel rot, wenn die dritte blau war: P(A | B) = 5/11
Die mittlere Linie zeigt P(A ∩ B) = 35/132



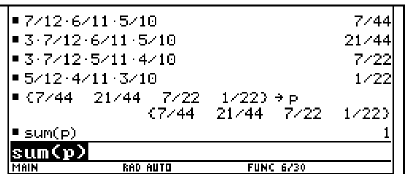
Aufgabe 5c)

Speichere den Gewinn und die Wahrscheinlichkeiten.
(Die 35/132 hat man aus Aufgabe b)
E(G) = 26.25
Also muss der Einsatz 26.25 Fr. betragen.

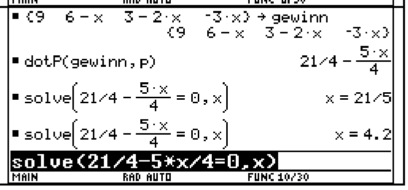


Aufgabe 5d)

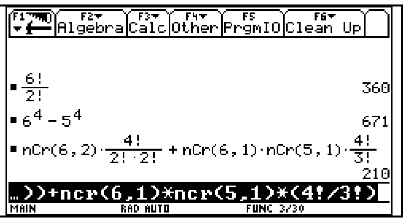
Wahrscheinlichkeiten für 3, 2, 1 resp. keine blaue.
Kontrolle, dass die Summe 1 beträgt.
(Das kann man auch mit "günstige/mögliche" rechnen.)



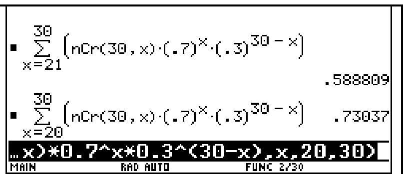
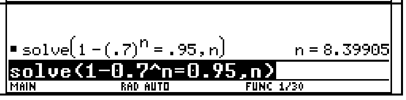
Die Gewinne sind 9, 6 – x, 3 – 2x und –3x.
E(G) = 0 setzen.
Somit x = 4.20 Fr.



Aufgabe 6a)

a1) geordnet ohne Wiederholung: 360 a2) alle Wörter minus die ohne A: 671 a3) entweder zwei Buchstaben wählen, je doppelt, oder einen dreifach, einen einfach: 210 Möglichkeiten	

Aufgabe 6b)

b1) Binomialverteilung: 58.88% Wer ab x = 20 summiert, erhält die falschen 73.04% für mindestens 20 gewonnene Spiele.	
b2) Gegenteil: n = 8.4 Also sind mindestens 9 Spiele nötig.	

Aufgabe 6c)

H_0: p = 0.7, H_1: p > 0.7 n = 256, μ = 179.2, σ = 7.332, x = 190 z = 1.473 1 – Φ(1.473) = 0.0704 = 7.04% > α Also muss man H_0 beibehalten. Die Aussage von Asterix ist statistisch **nicht** nachgewiesen.