

Lösung Matura 6B und 6E (2011)

Aufgabe 1a)

Definiere die Funktion.

Nullstelle (0 | 0)

Maximum $(1 | 5 \cdot e^{-1}) = (1 | 1.839)$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
Define y1(x)=5*x*e^-x Done zeros(y1(x), x) (0) zeros(d/dx(y1(x)), x) (1) y1(1) 5*e^-1 y1(1) 1.8394 y1(1) MAIN RAD AUTO FUNC 5/30					
zeros(d^2/dx^2(y1(x)), x) (2) y1(2) 10*e^-2 y1(2) 1.35335 y1(2) MAIN RAD AUTO FUNC 8/30					

Wendepunkt $(2 | 10 \cdot e^{-2}) = (2 | 1.353)$

Aufgabe 1b)

Rotationsvolumen

$$V = \frac{25 \cdot \pi}{4} = 19.635$$

$\pi \cdot \int_0^{\infty} ((y1(x))^2) dx$ 25*pi/4 $\pi \cdot \int_0^{\infty} ((y1(x))^2) dx$ 19.635 pi*f(y1(x))^2,x,0,inf) MAIN RAD AUTO FUNC 10/30					
--	--	--	--	--	--

Aufgabe 1c)

Den Wendepunkt hat man schon: $(2 | 10 \cdot e^{-2}) = (2 | 1.353)$

Steigung der Wendetangente: $m = -5 \cdot e^{-2} = -0.677$

y-Achsenabschnitt: $v = 20 \cdot e^{-2} = 2.707$

$d/dx(y1(x)) x=2$ -5*e^-2 $d/dx(y1(x)) x=2$ -0.676676 solve(10*e^-2 = -5*e^-2*2 + v, v) v=20*e^-2 e^(10*e^-2)=-5*e^-2*2+v,v) MAIN RAD AUTO FUNC 13/30					
solve(10*e^-2 = -5*e^-2*2 + v, v) v=2.70671 Define y2(x)=-5*e^-2*x+20*e^-2 Done solve(y2(x)=0, x) x=4 1/2*4*v v=20*e^-2 40*e^-2 1/2*4*v v=20*e^-2 5.41341 1/2*4*v v=20*e^-2 MAIN RAD AUTO FUNC 18/30					

Wendetangente: $y = -5 \cdot e^{-2} \cdot x + 20 \cdot e^{-2}$

Nullstelle der Wendetangente: $x = 4$.

Fläche des Dreiecks: $40 \cdot e^{-2} = 5.413$

Aufgabe 1d)

Höhe des Kegels: x , Bodenradius des Kegels: $y_1(x)$

Alles in die Volumenformel einsetzen.

V' berechnen.

$1/3 \cdot \pi \cdot (y1(x))^2 \cdot x$ 25*pi*x^3*e^-2*x/3 $d/dx(1/3 \cdot \pi \cdot (y1(x))^2 \cdot x)$ $(25 \cdot \pi \cdot x^2 - 50 \cdot \pi \cdot x^3) \cdot e^{-2} \cdot x$ d(1/3*pi*(y1(x))^2*x,x) MAIN RAD AUTO FUNC 27/30					
solve((25*pi*x^2 - 50*pi*x^3) * e^-2 * x = 0, x) x=3/2 or x=0 y1(3/2) 15*e^-3/2 y1(3/2) 1.67348 y1(3/2) MAIN RAD AUTO FUNC 50/30					
$1/3 \cdot \pi \cdot (y1(x))^2 \cdot x x=3/2$ 225*e^-3*pi/8 $1/3 \cdot \pi \cdot (y1(x))^2 \cdot x x=3/2$ 4.39905 1/3*pi*(y1(x))^2*x x=3/2 MAIN RAD AUTO FUNC 50/30					

$V' = 0$, folglich $x = 3/2$.

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15 \cdot e^{-\frac{3}{2}}}{2}, \text{ somit } P\left(\frac{3}{2} \mid \frac{15 \cdot e^{-\frac{3}{2}}}{2}\right) = P(1.5 \mid 1.673)$$

Maximales Volumen: $V_{\max} = \frac{225 \cdot e^{-3} \cdot \pi}{8} = 4.399$

Aufgabe 2a)

Definiere die Funktion.
 Setze $y(x) = x$ für die Schnittpunkte = Integrationsgrenzen.
 Berechne das Integral, setze = 36 und löse nach t auf.
 $t = 7$.

$y(x) = t \cdot x - x^2$ Done
 $\text{solve}(t \cdot x - x^2 = x, x)$ $x = t - 1$ or $x = 0$
 $\int_0^{t-1} (y(x) - x) dx$ $\frac{(t-1)^3}{6}$
 $\text{solve}\left(\frac{(t-1)^3}{6} = 36, t\right)$ $t = 7$
 $\text{solve}((t-1)^3/6=36,t)$

Aufgabe 2b)

Bestimme die Nullstellen: $(0 | 0)$ und $(t | 0)$
 Schnittpunkte: $(0 | 0)$ und $(t/2 | \dots)$
 [Der y-Wert des zweiten Schnittpunkts ist bedeutungslos.]
 Totalfläche: $F_1 + F_2 = \frac{t^3}{6}$

$\text{solve}(y(x) = 0, x)$ $x = t$ or $x = 0$
 $\text{solve}(y(x) = x^2, x)$ $x = \frac{t}{2}$ or $x = 0$
 $\int_0^{t/2} y(x) dx$ $\frac{t^3}{6}$
 $\int(y(x), x, 0, t)$

Linke Teilfläche: $F_1 = \frac{t^3}{24}$
 Die linke Teilfläche ist $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche.
 Das Verhältnis beträgt somit 1 : 3 (unabhängig von t).

$\int_0^{t/2} (y(x) - x^2) dx$ $\frac{t^3}{24}$
 $\frac{t^3}{6} - \frac{t^3}{24}$ $\frac{t^3}{8}$
 $\frac{t^3/6 - t^3/24}{t^3/6}$ $\frac{1}{4}$
 $\frac{t^3/6 - t^3/24}{t^3/6}$

Aufgabe 2c)

Berechne die Steigung der Kurve und damit die Steigung der Kurvennormalen.
 Gleichung der Normalen: $y = -\frac{1}{t} \cdot x$
 Gleichsetzen der Kurve und der Normalen gibt die x-Koordinate des anderen Schnittpunkts.

$y(x) = t \cdot x - x^2$
 $\frac{d}{dx}(y(x)) |_{x=0}$ t
 Define $n(x) = -\frac{1}{t} \cdot x$ Done
 $\text{solve}(y(x) = n(x), x)$ $x = \frac{t^2+1}{t}$ or $x = 0$
 $\text{solve}(y(x)=n(x),x)$

Berechne dann die Fläche.
 F' berechnen ...

$\int_0^{\frac{t^2+1}{t}} (y(x) - n(x)) dx$ $\frac{(t^2+1)^3}{6 \cdot t^3}$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{(t^2+1)^3}{6 \cdot t^3} \right)$ $\frac{(t^2-1) \cdot (t^2+1)^2}{2 \cdot t^4}$
 $\frac{d((t^2+1)^3/(6*t^3), t)$

... und $F' = 0$ setzen. Somit wird $t = 1$, weil $t > 0$ sein muss.
 Weil $F''(1) = 4 > 0$ ist, handelt es sich um ein Minimum.
 (Nicht verlangt, weil schon entsprechend in Aufgabe 1d vorgekommen: Die minimale Fläche beträgt $4/3$)

$\text{solve}\left(\frac{(t^2-1) \cdot (t^2+1)^2}{2 \cdot t^4} = 0, t\right)$ $t = 1$ or $t = -1$
 $\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{(t^2+1)^3}{6 \cdot t^3} \right) |_{t=1}$ 4
 $\frac{d^2((t^2+1)^3/(6*t^3), t, 2) | t=1$

Oder man berechnet $F(1)$ und dazu zwei daneben liegende Werte von $F(t)$.
 Dann erkennt man auch, dass $F(1) = 4/3$ ein Minimum ist.

$\frac{(t^2+1)^3}{6 \cdot t^3} |_{t=1}$ $4/3$
 $\frac{(t^2+1)^3}{6 \cdot t^3} |_{t=0.9}$ 1.13568
 $\frac{(t^2+1)^3}{6 \cdot t^3} |_{t=1.1}$ 1.33333
 $\frac{(t^2+1)^3}{6 \cdot t^3} |_{t=0.9, 1.0, 1.1}$

Aufgabe 3a)

<p>Speichere die Punkte. Bestimme die Richtungsvektoren von n und m. n ist der Normalenvektor auf die Ebene ε. (Im Text stehen die Vektorpfeile nie.) In die Formel einsetzen, ergibt $\alpha = 36.699^\circ$</p>	
--	--

Aufgabe 3b)

<p>Schneide h mit ε: Startpunkt S, Richtung n. M(3 1 -2)</p>	
<p>$\ MP\$ ist der Radius $r = 2 \cdot \sqrt{5} = 4.472$ $\ MS\$ ist Höhe des Kegels $h = 6$. Alles in die Volumenformel einsetzen. $V = 40 \cdot \pi = 125.664$</p>	

Aufgabe 3c)

<p>Speichere Q. Bilde die Gerade SQ und schneide sie mit ε. Der Schnittpunkt sei B, dann ist B(4 2 -6).</p>	
<p>$\ QS\ < \ BS\$, somit liegt Q zwischen S und B. Variante I: $\ BM\ = 4.243$ ist kleiner als der Radius r. Variante II: Der Winkel zwischen SM und SQ beträgt 35.26° und ist kleiner als α.</p>	

Aufgabe 3d)

<p>Bestimme zuerst die Richtung der Kreistangente: $PM \times PS = [5, -4, -2]^T$ $r_t \times PS = n_{TE} = [10, 1, 23]^T$ somit $10x + y + 23z - 75 = 0$.</p>	
---	--

Aufgabe 4a)

Quadratisches Ergänzen
 $M(4 \mid -1 \mid 2), r_1 = 2$

Für den Ersatzwert gibt es ab hier die gleichen Resultate
 (das Ersatz-Zentrum liegt auf der anderen Seite von g).

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 4$ $x^2 - 8 \cdot x + y^2 + 2 \cdot y + z^2 - 4 \cdot z + 17$					
$[4 \ -1 \ 2] \rightarrow m$					
$[4 \ -1 \ 2]$					
[4, -1, 2] → m					
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 2/30</small>					

Aufgabe 4b)

B ist der Lotfußpunkt von M auf g.
 Richtungsvektor von g: $r_g = [2, 1, -2]^T$ und
 somit die Normalebene auf g durch M.
 NE: $2x + y - 2z - 3 = 0$.

Mit g schneiden, ergibt B.
 $B(5 \mid 1 \mid 4)$
 $r_2 = \|MB\| = 3$

$[4 \ -1 \ 2] \rightarrow m$	$[4 \ -1 \ 2]$
$[11 \ 4 \ -2] \rightarrow g1$	$[11 \ 4 \ -2]$
$[13 \ 5 \ -4] \rightarrow g2$	$[13 \ 5 \ -4]$
$g1 + t \cdot (g2 - g1)$	$[2 \cdot t + 11 \ t + 4 \ -2 \cdot t - 2]$
$g2 - g1$	$[2 \ 1 \ -2]$
$\text{dotP}(g2 - g1, m)$	3
dotP(g2-g1, m)	
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 7/30</small>	
$\text{solve}(2 \cdot (2 \cdot t + 11) + t + 4 - 2 \cdot (-2 \cdot t - 2) - 3)$	$t = -3$
$[2 \cdot t + 11 \ t + 4 \ -2 \cdot t - 2] t = -3$	$[5 \ 1 \ 4]$
$[5 \ 1 \ 4] \rightarrow b$	$[5 \ 1 \ 4]$
$\text{norm}(b - m)$	3
norm(b-m)	
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 11/30</small>	

Aufgabe 4c)

B ist der Mittelpunkt der gesuchten Strecke. Weil $\|r_g\| = 3$,
 kann man r_g in beide Richtungen an B anhängen und erhält P
 und Q.
 $P(7 \mid 2 \mid 2), Q(3 \mid 0 \mid 6)$
 $r_3 = 3 \cdot \sqrt{2} = 4.243$

Andere Variante: $\|MB\| = \|[1, 2, 2]^T\| = 3$.
 Dann erhält man r_3 mit Pythagoras (MBP und MBQ sind Geo-
 Dreiecke) und kann g mit einer Kugel k_3 um M mit Radius r_3
 schneiden.
 Gleichung der Kugel $k_3: (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 18$.

$\text{norm}(b - m)$	3
$\text{norm}(g2 - g1)$	3
$b + g2 - g1$	$[7 \ 2 \ 2]$
$b - (g2 - g1)$	$[3 \ 0 \ 6]$
$\text{norm}([3 \ 0 \ 6] - m)$	$3 \cdot \sqrt{2}$
$\text{norm}([3 \ 0 \ 6] - m)$	4.24264
norm([3, 0, 6] - m)	
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 16/30</small>	

Aufgabe 4d)

Gesucht ist ein Punkt R auf g so, dass sich g und MR im
 Winkel 30° schneiden. Weil MR der Normalenvektor auf die
 Tangentialebene in R ist, schneidet dann g diese Ebene im
 Winkel 60° . Dann entsteht ein halbes gleichseitiges Dreieck
 MBR. Somit ist $r_4 = 2r_2 = 6$.

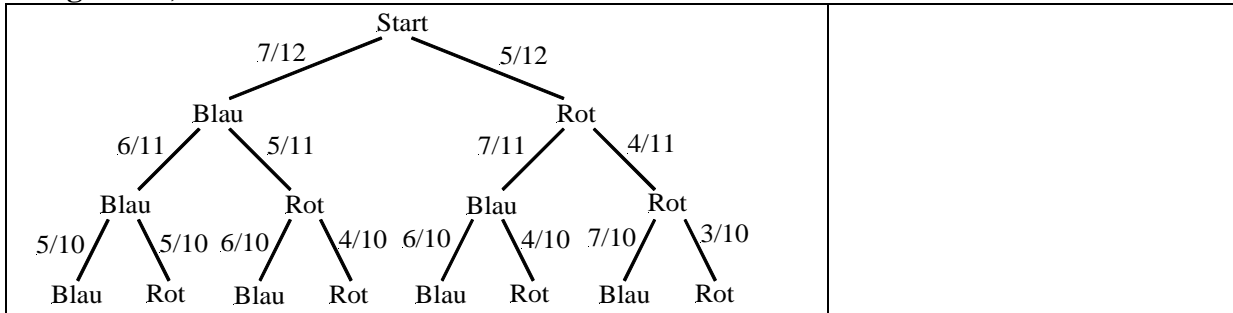
Andere Variante: $G(2t + 11 \mid t + 4 \mid -2t - 2)$ ist ein Punkt auf g.
 Finde G so, dass GM und r_g in einem Winkel von 30°
 zueinander stehen.
 Dann ist G im Output sichtbar und $\|GM\| = 6$.

Näherungswerte für die beiden möglichen Punkte G:
 $G(1.536 \mid -0.732 \mid 7.464)$

$G(8.464 \mid 2.732 \mid 0.536)$

$m - g \rightarrow mg$	$[2 \cdot t + 11 \ t + 4 \ -2 \cdot t - 2]$
$g2 - g1 \rightarrow rg$	$[2 \cdot t - 7 \ -t - 5 \ 2 \cdot t + 4]$
$\frac{\text{dotP}(mg, rg)}{\text{norm}(mg) \cdot \text{norm}(rg)} = \cos(30^\circ)$	$[2 \ 1 \ -2]$
$\frac{-(t+3)}{\sqrt{t^2 + 6 \cdot t + 10}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	
norm(mg)*norm(rg)=cos(30°)	
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 25/30</small>	
$\text{solve}\left(\frac{-(t+3)}{\sqrt{t^2 + 6 \cdot t + 10}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, t\right)$	$t = -(\sqrt{3} + 3)$
$mg t = -(\sqrt{3} + 3)$	$[2 \cdot \sqrt{3} - 1 \ \sqrt{3} - 2 \ -2 \cdot \sqrt{3} - 2]$
$\text{norm}([2 \cdot \sqrt{3} - 1 \ \sqrt{3} - 2 \ -2 \cdot \sqrt{3} - 2])$	6
2*J(3)-1, J(3)-2, -2*J(3)-211	
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 28/30</small>	
g	$[2 \cdot t + 11 \ t + 4 \ -2 \cdot t - 2]$
$\text{solve}\left(\frac{-(t+3)}{\sqrt{t^2 + 6 \cdot t + 10}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, t\right)$	$t = -(\sqrt{3} + 3)$
$g t = -(\sqrt{3} + 3)$	$[5 - 2 \cdot \sqrt{3} \ 1 - \sqrt{3} \ 2 \cdot \sqrt{3} + 4]$
$g t = -(\sqrt{3} + 3)$	$[1.5359 \ -0.732051 \ 7.4641]$
g t = -(J(3)+3)	
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 7/30</small>	
$\text{solve}\left(\frac{-(t+3)}{\sqrt{t^2 + 6 \cdot t + 10}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, t\right)$	$t = \sqrt{3} - 3$
$g t = \sqrt{3} - 3$	$[2 \cdot \sqrt{3} + 5 \ \sqrt{3} + 1 \ 4 - 2 \cdot \sqrt{3}]$
$g t = \sqrt{3} - 3$	$[8.4641 \ 2.73205 \ 0.535898]$
g t = J(3)-3	
<small>MAIN RAD AUTO FUNC 10/30</small>	

Aufgabe 5a)



Aufgabe 5b)

Dritte Kugel blau: jeder zweite Pfad. $P(B) = 7/12$
 Zweite Kugel rot, wenn die dritte blau war: $P(A | B) = 5/11$
 Die mittlere Linie zeigt $P(A \cap B) = 35/132$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$7/12 \cdot 6/11 \cdot 5/10 + 7/12 \cdot 5/11 \cdot 6/10 + 5/12 \cdot 7/11 \cdot 6/10 + 5/12 \cdot 4/11 \cdot 7/10$					
$\frac{35}{132}$					
$\frac{35}{132} / \frac{7}{12}$					
$5/11$					
$(35/132) / (7/12)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

Aufgabe 5c)

Speichere den Gewinn und die Wahrscheinlichkeiten.
 (Die 35/132 hat man aus Aufgabe b)
 $E(G) = 26.25$
 Also muss der Einsatz 26.25 Fr. betragen.

$\langle 99 \ 0 \rangle \rightarrow$ gewinn	$\langle 99 \ 0 \rangle$
$\left\{ \frac{35}{132} \ 1 - \frac{35}{132} \right\} \rightarrow p$	$\left\{ \frac{35}{132} \ \frac{97}{132} \right\}$
dotP(gewinn, p)	$\frac{105}{4}$
dotP(gewinn, p)	26.25
dotP(gewinn, p)	
MAIN RAD AUTO FUNC 7/30	

Aufgabe 5d)

Wahrscheinlichkeiten für 3, 2, 1 resp. keine blaue.
 Kontrolle, dass die Summe 1 beträgt.
 (Das kann man auch mit "günstige/mögliche" rechnen.)

$7/12 \cdot 6/11 \cdot 5/10$	7/44
$3 \cdot 7/12 \cdot 6/11 \cdot 5/10$	21/44
$3 \cdot 7/12 \cdot 5/11 \cdot 4/10$	7/22
$5/12 \cdot 4/11 \cdot 3/10$	1/22
$\langle 7/44 \ 21/44 \ 7/22 \ 1/22 \rangle \rightarrow p$	$\langle 7/44 \ 21/44 \ 7/22 \ 1/22 \rangle$
sum(p)	1
sum(p)	
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30	

Die Gewinne sind 9, $6 - x$, $3 - 2x$ und $-3x$.
 $E(G) = 0$ setzen.
 Somit $x = 4.20$ Fr.

$\langle 9 \ 6 - x \ 3 - 2 \cdot x \ -3 \cdot x \rangle \rightarrow$ gewinn	$\langle 9 \ 6 - x \ 3 - 2 \cdot x \ -3 \cdot x \rangle$
dotP(gewinn, p)	$21/4 - \frac{5 \cdot x}{4}$
solve($21/4 - \frac{5 \cdot x}{4} = 0, x$)	$x = 21/5$
solve($21/4 - \frac{5 \cdot x}{4} = 0, x$)	$x = 4.2$
solve($21/4 - 5 \cdot x / 4 = 0, x$)	
MAIN RAD AUTO FUNC 10/30	

Aufgabe 6a)

- a1) geordnet ohne Wiederholung: 360
 a2) alle Wörter minus die ohne A: 671
 a3) entweder zwei Buchstaben wählen, je doppelt,
 oder einen dreifach, einen einfach: 210 Möglichkeiten

Aufgabe 6b)

- b1) Binomialverteilung: 58.88%
 Wer ab $x = 20$ summiert, erhält die falschen 73.04% für
 mindestens 20 gewonnene Spiele.

- b2) Gegenteil: $n = 8.4$
 Also sind mindestens 9 Spiele nötig.

Aufgabe 6c)

- $H_0: p = 0.7, H_1: p > 0.7$
 $n = 256, \mu = 179.2, \sigma = 7.332, x = 190$
 $z = 1.473$
 $1 - \Phi(1.473) = 0.0704 = 7.04\% > \alpha$
 Also muss man H_0 beibehalten.
 Die Aussage von Asterix ist statistisch **nicht** nachgewiesen.