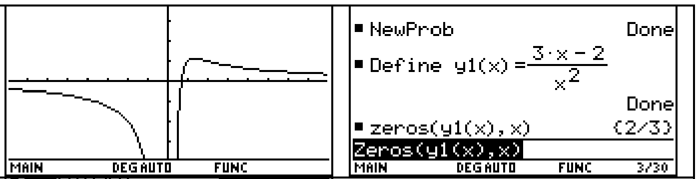
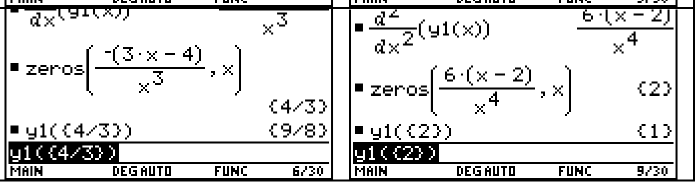
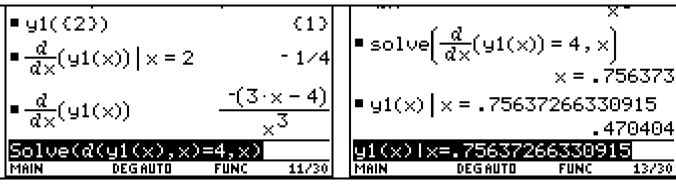
Lösung Matura 6H (2012)

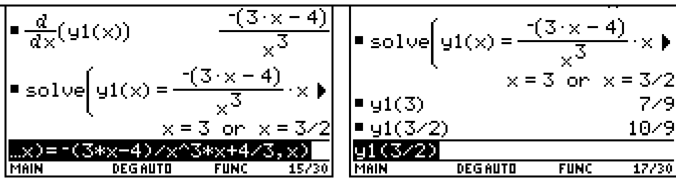
Aufgabe 1a)

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Nullstelle $N\left(\frac{2}{3} \mid 0\right)$, Polstelle und vertikale Asymptote $x = 0$, horizontale Asymptote $y = 0$	
Maximum $M\left(\frac{4}{3} \mid \frac{9}{8}\right)$ Wendepunkt $W(2 \mid 1)$	

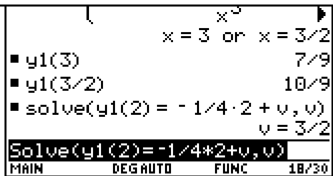
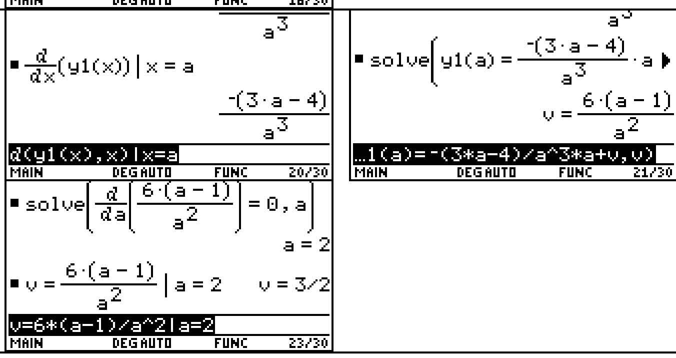
Aufgabe 1b)

Steigung im Wendepunkt $m = -¼$ Also sucht man den Kurvenpunkt mit Steigung 4. P(0.7564 | 0.4704)	

Aufgabe 1c)

Ansatz $y = m \cdot x + 4/3$, wobei m die Steigung im Punkt (x | y) ist. Das ergibt die Kurvenpunkte $\left(3 \mid \frac{7}{9}\right)$ und $\left(\frac{3}{2} \mid \frac{10}{9}\right)$	

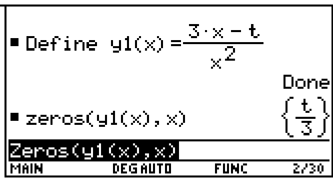
Aufgabe 1d)

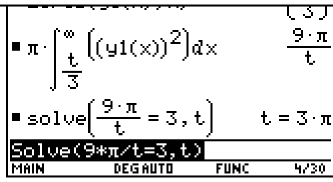
Variante 1: (anschaulich) Die Wendetangente liefert den höchsten y-Achsenabschnitt $v = 3/2$.	
Variante 2: (rechnerisch) Lege im Kurvenpunkt P(a | f(a)) die Tangente. Das ergibt v in Abhängigkeit von a. Suche das maximale v, d.h. v' = 0. Somit ist das grösstmögliche v $v = 3/2$. Man kann keine Tangente vom Punkt (0 | y) an die Kurve legen, wenn $y > 3/2$.	

Aufgabe 2a)

Die Funktion definieren.
Die Nullstelle ist die untere Grenze fürs Integral, die obere ist ∞.

$V = \pi \cdot \int_{t/3}^{\infty} \left(\frac{3x - t}{x^2} \right)^2 dx = 3$ ergibt $t = 3\pi$.

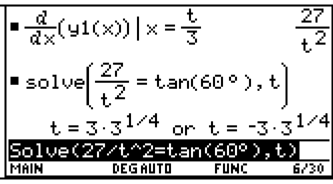


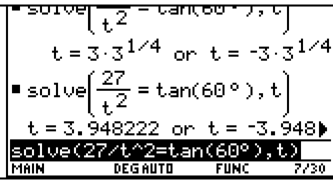


Aufgabe 2b)

$y'(t/3) = \tan(60°)$ nach t auflösen.

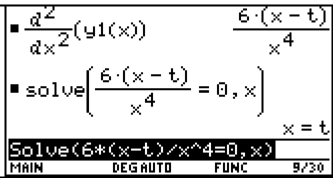
$t = 3^{5/4} = 3.948$.

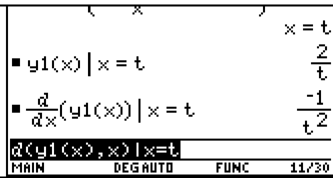




Aufgabe 2c)

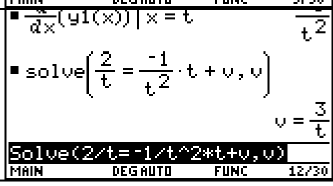
Wendepunkt W (t | 2/t),
mit Steigung $m = f'(t) = -1/t^2$

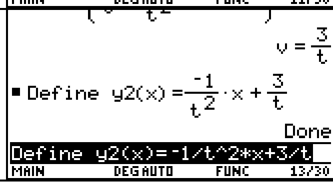




v ausrechnen.
Wendetangente definieren.

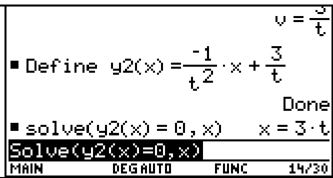
$w(x) = -\frac{1}{t^2} x + \frac{3}{t}$





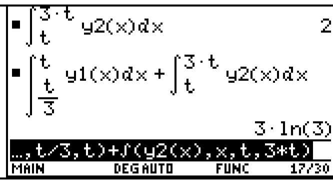
Aufgabe 2d)

Die Nullstelle der Funktion N(t/3 | 0) hat man von Aufgabe 2a), die x-Koordinate vom Wendepunkt von 2c)
Nullstelle der Wendetangente N(3t | 0)

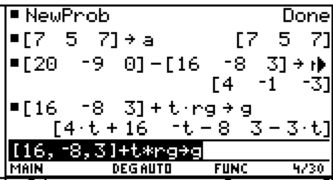
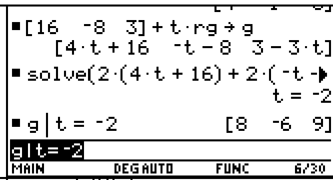
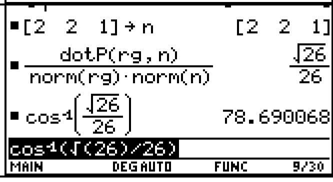
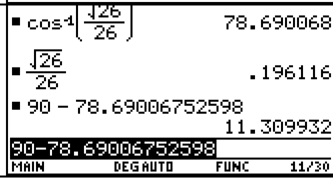


$\int_{t/3}^{t} f(x)dx + \int_{t}^{3t} w(x)dx = 3\ln(3)$

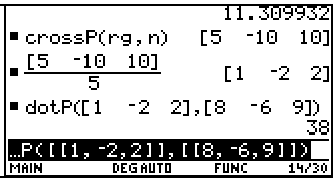
ist konstant. QED.



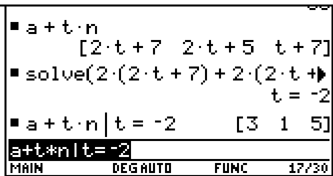
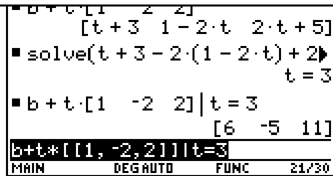
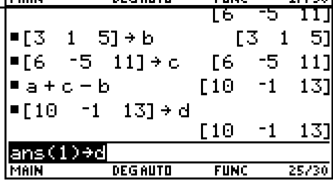
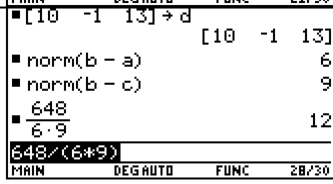
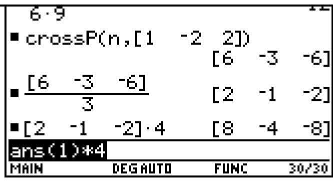
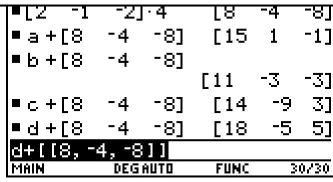
Aufgabe 3a)

Definiere A und g. Schneide g mit der Ebene ε_1 . S(8 | –6 | 9)	 
Winkel zwischen dem Normalenvektor n der Ebene und dem Richtungsvektor von g, auf 90° ergänzen. 11.31°	 

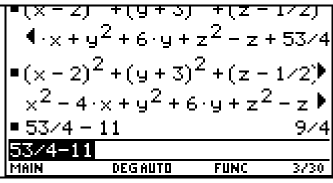
Aufgabe 3b)

n und rg sind Richtungen in der gesuchten Ebene ε_2. S oder einen Punkt von g einsetzen. Ebene ε_2 : x – 2y + 2z – 38 = 0.	
Ersatzwerte:	Die Ebene liegt auf der anderen Seite von A (an ABFE gespiegelt)

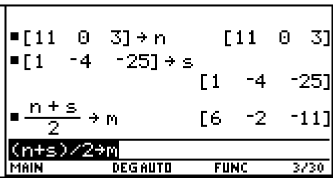
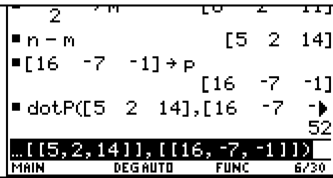
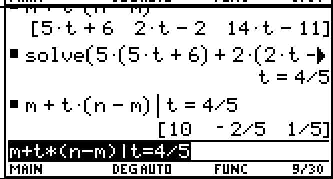
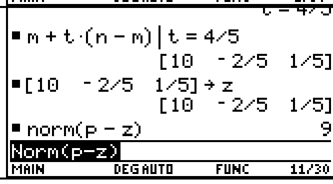
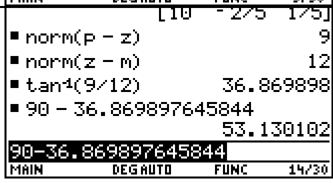
Aufgabe 3c)

B(3 | 1 | 5) ist Lotfusspunkt von A auf ε_1 C(6 | –5 | 11) Lotfusspunkt von B auf ε_2	 
BC = AD, also D(10 | –1 | 13). Oder: D ist Lotfusspunkt von A auf ε_2 . ‖AB‖ = 6, ‖BC‖ = 9, folglich hat CG Länge 12.	 
CG liegt auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen, also $n_1 \times n_2 = [2,-1,-2]^T$. Der hat Länge 3, also vervierfachen und in A, B, C, D anhängen. Zwei mögliche Lösungen: E(15 | 1 | –1), F(11 | –3 | –3), G(14 | –9 | 3), H(18 | –5 | 5) oder E(–1 | 9 | 15), F(–5 | 5 | 13), G(–2 | –1 | 19), H(2 | 3 | 21).	 
Ersatzwerte:	C(0 | 7 | –1), D(4 | 11 | 1) Die Längen sind dieselben, ebenso die Richtung der Schnittgeraden. E und F gibt die gleichen Punkte. E(15 | 1 | –1), F(11 | –3 | –3), G(8 | 3 | –9), H(12 | 7 | –7) oder E(–1 | 9 | 15), F(–5 | 5 | 13), G(–8 | 11 | 7), H(–4 | 15 | 9).

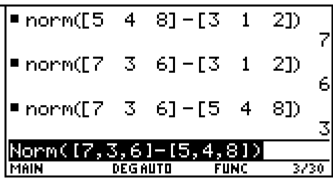
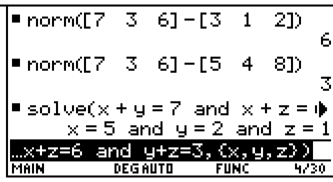
Aufgabe 4a)

<table>
<tr>
<td>Quadratisches Ergänzen, "von Hand"
M(2 | –3 | ½), r = 3/2</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

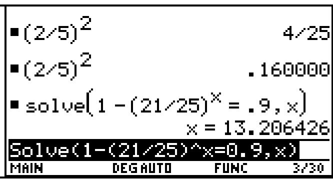
Aufgabe 4b)

<table>
<tr>
<td>M(6 | –2 | –11)
Ebene durch P, senkrecht zu SN.
5x + 2y + 14z – 52 = 0</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Diese Ebene mit SN schneiden.
Z(10 | –2/5 | 1/5)
Radius r = 9.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Winkel zwischen MZ und MP rechnen und auf 90° ergänzen.
Mit Skalarprodukt oder über tan, weil man die Längen des Dreiecks MPZ hat.
Es ist der 53.13° nördliche Breitenkreis.</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

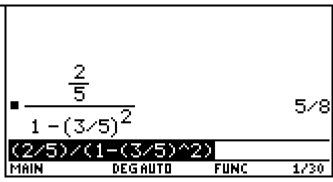
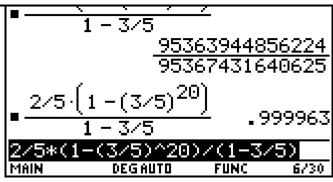
Aufgabe 4c)

<table>
<tr>
<td>Abstände der Zentren
$\|M_1M_2\| = 7 = r_1 + r_2$.
$\|M_1M_3\| = 6 = r_1 + r_3$.
$\|M_2M_3\| = 3 = r_2 + r_3$.
Löse das Gleichungssystem.
$r_1 = 5, r_2 = 2, r_3 = 1$.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

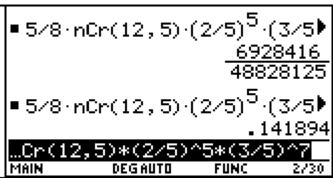
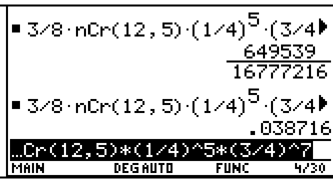
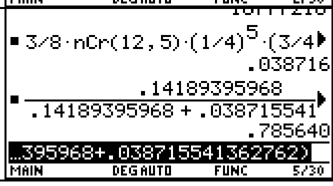
Aufgabe 5a)

Erste Teilfrage: 0.16. Zweite Teilfrage: (mindestens) 14 Würfe.		

Aufgabe 5b)

Erste Teilfrage: Beginne eine (nicht abbrechende) GR. $a_1 = 2/5$, $q = (3/5)^2$. Gewinn-Wahrscheinlichkeit 62.5%		
Abbrechende GR. $a_1 = 2/5$, $q = 3/5$, Suche s_{20} Wahrscheinlichkeit 99.996% Oder übers Gegenteil $1 - 0.6^{20} = 0.999963$		

Aufgabe 5c)

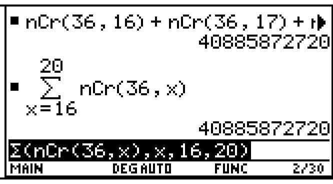
A: "Es ist ein Original" B: "Es erschienen genau 5 Sterne" $P(A \cap B) = 0.1419$ $P(\neg A \cap B) = 0.0387$		
$P(A \mid B) = 0.7856$ 78.56%		

Aufgabe 6a)

Verteile 15 Personen auf 20 Sitzplätze.

Aufgabe 6b)

Wähle die Personen aus für den ersten Bus. 16, 17, ... 20 Personen.
Der Rest geht auf den zweiten Bus.

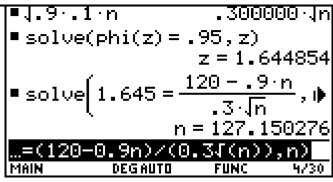


Aufgabe 6c)

Binomialverteilung.
n = 45, p = 0.9.
47.29%

Aufgabe 6d)

"Overbooking"-Problem
Normalverteilung, wobei n gesucht ist.
Löse $1.645 = \dfrac{120 - 0.9 \cdot n}{\sqrt{0.9 \cdot 0.1 \cdot n}}$ nach n auf.
Also 127 Buchungen. (Abrunden!)



Aufgabe 6e)

Hypothesentest:
H_0: p = 0.1
H_1: p > 0.1
s = 2.67% < 5%
Also H_0 verwerfen.
Die Vermutung ist berechtigt.
Normalverteilung geht nicht, weil σ zu klein ist (Bildschirm rechts).