Mathematik

1. **Kurvenbetrachtung**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = -2 \cdot x^4 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}$.

a) Bestimme die exakten Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte. (Nullstellen, Maxima, Minima, Wendepunkte)

b) Die von der Kurve $y = f(x)$ und der Parabel $y = g(x) = 3 \cdot x^2$ vollständig umschlossene Fläche rotiert um die x-Achse.
Berechne das Volumen des so entstandenen Rotationskörpers.

c) Betrachte die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f(x)$ liegende Fläche F.
In welchem Kurvenpunkt A muss man die Parallele zur y-Achse zeichnen, damit diese Gerade die Fläche F halbiert? Berechne die Koordinaten von A.

d) Betrachte die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f(x)$ liegende Fläche F.
In welchem Kurvenpunkt B muss man die Parallele zur x-Achse zeichnen, damit diese Gerade die Fläche F halbiert? Berechne die Koordinaten von B.

2. **Parameter gesucht**

Für t > 0 ist die Funktionskurve $y = f_t(x) = -x^4 + t \cdot x^2 + \frac{t^2}{12}$ gegeben.

a) Die Kurve $y = f_t(x)$ soll die Gerade $y = 8 \cdot x$ berühren.
Bestimme t und die Koordinaten des Berührpunktes.

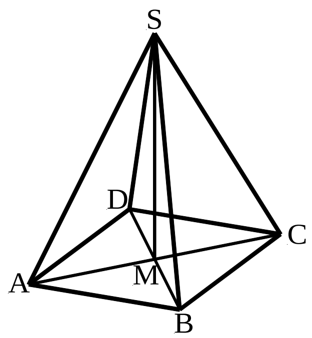
b) Bestimme die Koordinaten der Wendepunkte in Abhängigkeit von t.
Alle Wendepunkte aller Kurven $f_t(x)$ liegen auf einer weiteren Kurve. Bestimme die Funktionsgleichung dieser Kurve.

c) Bestimme die Steigung der Wendetangente in Abhängigkeit von t und zeige dann, dass alle Wendetangenten durch den Koordinatenursprung gehen.

d) Für welchen Wert von t stehen die beiden Wendetangenten rechtwinklig zueinander?

3. **Pyramide (Vektorgeometrie)**

Von einer geraden quadratischen Pyramide (siehe die Figur) kennt man S(–19 | 10 | 4), A(–1 | 4 | –2) sowie die Ebene
ε: 2x – 2y – z + 8 = 0, in welcher das Quadrat ABCD liegt.



a) Bestimme die Koordinaten von M, B, C und D.

b) Bestimme den Winkel zwischen der Seitenkante SA und der Ebene ε.

(Fortsetzung auf der zweiten Seite)

(Fortsetzung von Aufgabe 3.)

[Wer Teil a) nicht lösen konnte, darf c) und d) mit dem Ersatzwert B(–5 | 20 | –6) lösen.]

c) Bestimme die Fläche des Dreiecks ASB.

d) Eine zu ε parallele Ebene im Abstand 3 schneidet die Pyramide. Gesucht ist die Koordinatengleichung dieser Ebene sowie der Flächeninhalt des Schnittquadrates.

4. **Drei Kugeln mit gleichem Zentrum**
Gegeben sind M(–4 | 10 | –3), P(6 | 0 | 2), S(5 | –20 | 9) und ε: $11x - 10y + 2z - 30 = 0$.
(Die drei Teilaufgaben sind unabhängig.)

a) Gesucht ist die Kugel k_1 mit Zentrum M, welche die Gerade PS berührt.
Bestimme den Kugelradius und die Koordinaten des Berührpunktes.

b) Gesucht ist die Kugel k_2 mit Zentrum M, welche die Ebene ε in einem Kreis mit Radius $r = 5$ schneidet. Bestimme die Kugelgleichung.

c) Die Kugel k_3 hat Zentrum M. P liegt auf der Kugelfläche (von k_3).
Ein von S ausgehender Lichtstrahl tritt im Punkt P ins Innere der Kugel ein, wird danach im Innern an der Kugelwand im Punkt R reflektiert und tritt schliesslich bei Q wieder aus der Kugel heraus. Berechne die Koordinaten von Q.

5. **Aufkleber**
An der letzten Fussball-EM wurden Aufkleber mit Portraits der Teilnehmenden verkauft. Alle Aufkleber sind einzeln und identisch in Briefchen verpackt und es ist von aussen nicht ersichtlich, welche Person auf dem Portrait gezeigt wird.
Wir nehmen an, dass es 12 Teams waren (darunter die Schweiz) und von jedem Team 18 Portraits (nämlich 1 Trainer, 2 Torhüter und 15 Feldspieler) verkauft wurden.

a) A kauft 25 Aufkleber. (Dabei können Portraits mehrfach vorkommen.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er darunter mindestens 4 Torhüter?

b) B kauft einen Aufkleber. Sein Freund öffnet das Briefchen und sagt B, dass das Portrait keinen Trainer zeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt folglich dieser Aufkleber einen Schweizer Feldspieler?

c) C kauft einen Aufkleber. Sind die Ereignisse "Das Bild zeigt einen Torhüter" und "Das Bild zeigt eine Person aus dem Schweizer Team" abhängig oder unabhängig? (Begründe.)

d) D hat 12 Aufkleber gekauft. Es sind 3 (verschiedene) Torhüter und 9 (verschiedene) Feldspieler. D ordnet die Bilder in einem Album in einer Reihe an. Wie viele Möglichkeiten hat er ...
d_1) ... wenn die Bilder der Torhüter alle nebeneinander liegen sollen?
d_2) ... wenn nie zwei Bilder von Torhütern nebeneinander liegen sollen?

6. **Glücksrad**
Ein Glücksrad zeigt die Zeichen ⊗ und Ⓨ mit den Wahrscheinlichkeiten p(⊗) = 0.37 und p(Ⓨ) = 0.63. (Die Teilaufgaben sind unabhängig.)

a) Mr. X möchte mit 99%-iger Sicherheit mindestens ein Zeichen ⊗ erhalten; Mr. Y möchte mit ebenfalls 99%-iger Sicherheit mindestens ein Zeichen Ⓨ erhalten.
Prüfe (d.h. beweise oder widerlege), ob die folgende Aussage stimmt:
Mr. X benötigt (für seine 99%-ige Sicherheit) genau doppelt so viele Drehungen des Glücksrads wie Mr. Y (für seine eigene 99%-ige Sicherheit).

b) Mr. X und Mr. Y spielen gegeneinander folgendes Spiel: Sie drehen das Glücksrad abwechslungsweise, wobei Mr. X beginnt.
Wenn Mr. X das Zeichen ⊗ erhält, hat er gewonnen und das Spiel ist sofort zu Ende; andernfalls ist Mr. Y an der Reihe. Wenn Mr. Y das Zeichen Ⓨ erhält, dann hat er seinerseits gewonnen und das Spiel ist sofort zu Ende; andernfalls ist wieder Mr. X an der Reihe. Hierzu zwei Teilfragen:
b_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Mr. X das Spiel?
b_2) Mr. X erhält von Mr. Y pro gewonnenes Spiel 10 Fr; Mr. Y erhält seinerseits von Mr. X pro gewonnenes Spiel 9 Fr. Wer ist bei diesem Spiel im Vorteil?

c) Mr. X hat das Gefühl, die Angabe von p(⊗) = 0.37 stimme nicht mehr und sei kleiner geworden. Er beobachtet dazu 500 Drehungen des Glücksrades.
Welche Anzahl Zeichen ⊗ bestätigen den Verdacht von Mr. X? (α = 5%)

****