Musterlösung Matura 6GK (2016)

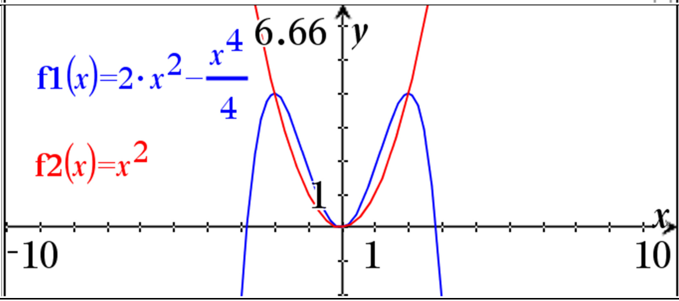
Aufgabe 1a)

Definiere die Funktion	$f(x):=2\cdot x^2-t^2\cdot x^4$ — *Done*
f2 für t = 2	$f2(x):=f(x)\vert t=2$ — *Done*
Nullstellen	$\text{zeros}(f2(x),x)$ — $\left\{\frac{-\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
f'(x)	$\frac{d}{dx}(f2(x))$ — $4\cdot x-16\cdot x^3$
Extrema, x-Werte	$\text{zeros}(4\cdot x-16\cdot x^3,x)$ — $\left\{\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$
und y-Werte dazu.	$f2\left(\left\{\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}\right)$ — $\left\{\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}\right\}$
f''(x)	$\frac{d^2}{dx^2}(f2(x))$ — $4-48\cdot x^2$
Nachweis für Maximum, Minimum und Maximum	$4-48\cdot x^2\vert x=\left\{\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$ — $\{-8,4,-8\}$
Wendepunkte, x-Werte	$\text{zeros}(4-48\cdot x^2,x)$ — $\left\{\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$
und y-Werte dazu.	$f2\left(\left\{\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}\right)$ — $\left\{\frac{5}{36},\frac{5}{36}\right\}$

Aufgabe 1b)

Die Nullstellen sind die Integrationsgrenzen, siehe 1a) Einsetzen in die Formel fürs Volumen des Rotationskörpers	$\pi\cdot\int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(f2(x))^2\,dx$ — $\frac{8\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{315}$
Näherungswert	$\int \sqrt{2}$ — 0.112835

Aufgabe 1c)

Nullstellen allgemein	$\mathrm{zeros}(f(x),x)$ $\quad \left\{\frac{-\sqrt{2}}{t},\frac{\sqrt{2}}{t},0\right\}$
Gesamtfläche	$ftotal:=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{t}} f(x)\,dx$ $\quad \frac{8\cdot\sqrt{2}}{15\cdot t^3}$
Schnittpunkte mit $y = x^2$.	$\mathrm{solve}(f(x)=x^2,x)$ $\quad x=\frac{-1}{t}$ or $x=\frac{1}{t}$ or $x=0$
Obere Teilfläche	$foben:=\int_0^{\frac{1}{t}} \left(f(x)-x^2\right)dx$ $\quad \frac{2}{15\cdot t^3}$
Untere Teilfläche (Man kann auch foben/ftotal rechnen)	$funten:=ftotal-foben$ $\quad \frac{\frac{8\cdot\sqrt{2}}{15}-\frac{2}{15}}{t^3}$
Das Verhältnis ist von t unabhängig und beträgt etwa 0.2147	$\frac{foben}{funten}$ $\quad \frac{4\cdot\sqrt{2}+1}{31}$
Hier ist noch die Grafik zur Situation. (t = ½)	

Aufgabe 1d)

x-Koordinaten der Wendepunkte	$\mathrm{zeros}\left(\frac{d^2}{dx^2}(f(x)),x\right)$ $\quad \left\{\frac{\sqrt{3}}{3\cdot t},\frac{-\sqrt{3}}{3\cdot t}\right\}$
Steigungen in diesen Punkten (Steigungen der Wendetangenten)	$\frac{d}{dx}(f(x))\mid x=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3\cdot t},\frac{-\sqrt{3}}{3\cdot t}\right\}$ $\quad \left\{\frac{8\cdot\sqrt{3}}{9\cdot t},\frac{-8\cdot\sqrt{3}}{9\cdot t}\right\}$
Im Wendepunkt im I. Quadranten muss der Steigungswinkel 30° oder 60° sein.	$\mathrm{solve}\left(\frac{8\cdot\sqrt{3}}{9\cdot t}=\tan(30°),t\right)$ $\quad t=\frac{8}{3}$
Nach t auflösen.	$\mathrm{solve}\left(\frac{8\cdot\sqrt{3}}{9\cdot t}=\tan(60°),t\right)$ $\quad t=\frac{8}{9}$

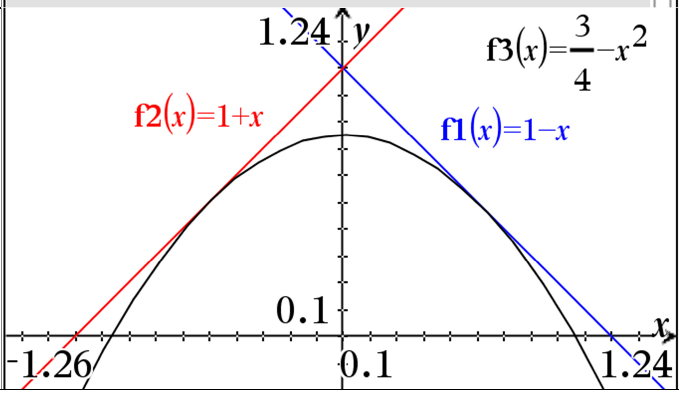
Aufgabe 2a)

Berechne die Kathetenlängen a_2,	$10\cdot 0.8$ → $8.$
a_3 und	$10\cdot(0.8)^2$ → 6.4
a_4.	$10\cdot(0.8)^3$ → 5.12
Erste Trapezfläche	$f1:=\frac{10^2-8^2}{2}$ → 18
Zweite Trapezfläche	$f2:=\frac{(6.4)^2-(5.12)^2}{2}$ → 7.3728
Quotient der GF der Flächen	$q:=\frac{f2}{f1}$ → 0.4096
Summenformel für die GR.	$\frac{f1}{1-q}$ → 30.4878
Alternativer Lösungsweg Alternierende GR mit $F_1 = 50$, $F_2 = -32$ "grau minus weiss plus grau minus weiss etc."	$f1:=\frac{1}{2}\cdot 10^2$ → 50 $f2:=\frac{1}{2}\cdot 8^2$ → 32 $q:=\frac{-f2}{f1}$ → -0.64 $\frac{f1}{1-q}$ → 30.4878

Aufgabe 2b)

Berechne a_1,	$a1:=40\cdot\sqrt{2}$ → $40\cdot\sqrt{2}$
a_2 (war gegeben)	$a2:=40$ → 40
und q.	$q:=\frac{a2}{a1}$ → $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Länge der Spirale aussen herum	$\frac{a1\cdot(1-q^8)}{1-q}$ → $75\cdot\sqrt{2}+75$
Hypotenuse des grössten Dreiecks minus Kathete des kleinsten.	$a1\cdot\sqrt{2}-a1\cdot q^7$ → 75
Alles zusammenzählen.	$75\cdot\sqrt{2}+75+75$ → $75\cdot\sqrt{2}+150$ $75\cdot\sqrt{2}+75+75$ → 256.066

Aufgabe 2c)

Ansatz für die Parabel (Koordinatensystem siehe unten)	$f(x):=a-b\cdot x^2$ Done
Die Nullstellen sind die Integrationsgrenzen	$\text{zeros}(f(x),x)$ $\left\{\left\{-\sqrt{\frac{a}{b}},\frac{a}{b}\ge 0\right\},\left\{\sqrt{\frac{a}{b}},\frac{a}{b}\ge 0\right\}\right\}$
Berechne die Fläche	$2\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} f(x)\,dx$ $\frac{4\cdot a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{3}$
Die Parabel muss die Geraden y = 1 – x berühren. B(t | 1 – t) Das ergibt das Gleichungssystem.	$\text{solve}\left(\begin{cases}f(t)=1-t\\ -2\cdot b\cdot t=-1\end{cases},a,b\right)$ $a=\frac{-(t-2)}{2}$ and $b=\frac{1}{2\cdot t}$
Nach a und b auflösen und in der Fläche einsetzen.	$\frac{4\cdot a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{3}\Big\vert a=\frac{-(t-2)}{2}$ and $b=\frac{1}{2\cdot t}$
Fläche, abhängig von t	$\frac{-2\cdot(t-2)\cdot\sqrt{-t\cdot(t-2)}}{3}$
Ableiten	$\frac{d}{dt}\left(\frac{-2\cdot(t-2)\cdot\sqrt{-t\cdot(t-2)}}{3}\right)$
und	$\frac{2\cdot(t-2)\cdot(t-1)}{3\cdot\sqrt{-t\cdot(t-2)}}-\frac{2\cdot\sqrt{-t\cdot(t-2)}}{3}$
nullsetzen.	$\text{solve}\left(\frac{2\cdot(t-2)\cdot(t-1)}{3\cdot\sqrt{-t\cdot(t-2)}}-\frac{2\cdot\sqrt{-t\cdot(t-2)}}{3}=0,t\right)$ $t=\frac{1}{2}$
Die Parabelgleichung lautet y = ¾ – x^2 (war nicht verlangt)	$\text{solve}\left(\begin{cases}f(t)=1-t\\ -2\cdot b\cdot t=-1\end{cases},a,b\right)\Big\vert t=\frac{1}{2}$ $a=\frac{3}{4}$ and $b=1$
Maximale Fläche	$\frac{-2\cdot(t-2)\cdot\sqrt{-t\cdot(t-2)}}{3}\Big\vert t=\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
Da ist noch die Graphik Die Fläche unter der Parabel ist etwa 86.6% der Gesamtfläche.	

Aufgabe 3a)

Speichere die Punkte A und B	$a:=[5\ \ 9\ \ 3]$	$[5\ \ 9\ \ 3]$
	$b:=[3\ \ {}^{-}1\ \ 5]$	$[3\ \ {}^{-}1\ \ 5]$
Normalenvektor der ersten Ebene	$n1:=[4\ \ 1\ \ {}^{-}3]$	$[4\ \ 1\ \ {}^{-}3]$
	$4\cdot x+y-3\cdot z-20=0$	$4\cdot x+y-3\cdot z-20=0$
Normalenvektor der zweiten Ebene	$n2:=[20\ \ {}^{-}13\ \ {}^{-}9]$	$[20\ \ {}^{-}13\ \ {}^{-}9]$
	$20\cdot x-13\cdot y-9\cdot z-28=0$	$20\cdot x-13\cdot y-9\cdot z-28=0$
Richtungsvektor der Schnittgeraden	$\text{crossP}(n1,n2)$	$[{}^{-}48\ \ {}^{-}24\ \ {}^{-}72]$
gekürzt	$\frac{{}^{-}1}{24}\cdot[{}^{-}48\ \ {}^{-}24\ \ {}^{-}72]$	$[2\ \ 1\ \ 3]$
Finde einen Punkt auf g: Schneide die Ebenen mit z = 0	$\text{solve}\left(\begin{cases}4\cdot x+y-3\cdot z-20=0\\20\cdot x-13\cdot y-9\cdot z-28=0\end{cases},x,y\right)\mid z=0$	$x=4$ and $y=4$
Geradengleichung der Schnittgeraden	$g:=[4\ \ 4\ \ 0]+t\cdot[2\ \ 1\ \ 3]$	$[2\cdot t+4\ \ t+4\ \ 3\cdot t]$
Fürs Weiterrechnen ist es die gleiche Gerade g.	$g\mid t=1$	$[6\ \ 5\ \ 3]$
	$g\mid t=2$	$[8\ \ 6\ \ 6]$

Aufgabe 3b)

Schneide die Mittelnormalebene von AB mit g. Mittelpunkt von AB	$\frac{a+b}{2}$	$[4\ \ 4\ \ 4]$
Vektor von M nach A. Normalenvektor der Mittelnormal-ebene	$\frac{a-b}{2}$	$[1\ \ 5\ \ {}^{-}1]$
	$\text{dotP}([1\ \ 5\ \ {}^{-}1],[4\ \ 4\ \ 4])$	20
Koordinatengleichung	$x+5\cdot y-z-20=0$	$x+5\cdot y-z-20=0$
	g	$[2\cdot t+4\ \ t+4\ \ 3\cdot t]$
mit g schneiden	$\text{solve}(2\cdot t+4+5\cdot(t+4)-3\cdot t-20=0,t)$	$t={}^{-}1$
	$g\mid t={}^{-}1$	$[2\ \ 3\ \ {}^{-}3]$
Punkt C	$c:=[2\ \ 3\ \ {}^{-}3]$	$[2\ \ 3\ \ {}^{-}3]$
Alternativer Lösungsweg: norm(g–a)=norm(g–b) nach t auflösen.	$\text{solve}(\text{norm}(g-a)=\text{norm}(g-b),t)$	$t={}^{-}1$

Aufgabe 3c)

Koordinatengleichung der Ebene ABC bestimmen	$\mathrm{crossP}(b-a,c-a)$	$\begin{bmatrix}72 & -18 & -18\end{bmatrix}$
Normalenvektor	$\frac{1}{18}\cdot\begin{bmatrix}72 & -18 & -18\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\end{bmatrix}$
	$\mathrm{dotP}(\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\end{bmatrix},a)$	8
Koordinatengleichung	$4\cdot x-y-z-8=0$	$4\cdot x-y-z-8=0$
Winkel zwischen diesem Normalen- vektor und dem Richtungsvektor von g.	$\frac{\mathrm{dotP}(\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix})}{\mathrm{norm}(\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\end{bmatrix})\cdot \mathrm{norm}(\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix})}$	$\frac{2\cdot\sqrt{7}}{21}$
	$\left(\cos^{-1}\left(\frac{2\cdot\sqrt{7}}{21}\right)\right)\blacktriangleright\mathrm{DD}$	$75.4055°$
Auf 90° ergänzen	$(90°-75.405508782086°)\blacktriangleright\mathrm{DD}$	$14.5945°$
Ergebnis im Bogenmass	$14.594491217914°$	0.254722

Aufgabe 3d)

Grundfläche der Pyramide Fläche des Dreiecks ABC	$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{norm}(\mathrm{crossP}(b-a,c-a))$	$27\cdot\sqrt{2}$
Finde die Höhe der Pyramide mit der Volumenformel	$\mathrm{solve}\left(48=\frac{1}{3}\cdot 27\cdot\sqrt{2}\cdot h,h\right)$	$h=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3}$
HNF der Ebene	$\frac{4\cdot x-y-z-8}{\mathrm{norm}(\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\end{bmatrix})}$	$\frac{\sqrt{2}\cdot(4\cdot x-y-z-8)}{6}$
Bilde die Gleichung (der Parallelebene)	$\frac{\sqrt{2}\cdot(4\cdot x-y-z-8)}{6}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}\cdot(4\cdot x-y-z-8)}{6}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3}$
und schneide mit g	g	$\begin{bmatrix}2\cdot t+4 & t+4 & 3\cdot t\end{bmatrix}$
	$\mathrm{solve}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot(4\cdot(2\cdot t+4)-(t+4)-3\cdot t-8)}{6}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3},t\right)$	$t=3$
Pyramidenspitze S	$g\vert t=3$	$\begin{bmatrix}10 & 7 & 9\end{bmatrix}$
2. Lösung auf der negativen Seite der Ebene	$\mathrm{solve}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot(4\cdot(2\cdot t+4)-(t+4)-3\cdot t-8)}{6}=\frac{-8\cdot\sqrt{2}}{3},t\right)$	$t=-5$
Pyramidenspitze S	$g\vert t=-5$	$\begin{bmatrix}-6 & -1 & -15\end{bmatrix}$

Aufgabe 4a)

Speichere die Daten	$m1:=[1\ \ 13\ \ 2]$	$[1\ \ 13\ \ 2]$
Quadratisches Ergänzen muss von Hand ausgeführt werden.	$\text{expand}\left((x-13)^2+(y-1)^2+(z-8)^2-9\right)$	$x^2-26\cdot x+y^2-2\cdot y+z^2-16\cdot z+225$
Mittelpunkt	$m2:=[13\ \ 1\ \ 8]$	$[13\ \ 1\ \ 8]$
Radius	$r:=3$	3
Speichere g.	$[2\ \ 12\ \ 3]-m1$	$[1\ \ -1\ \ 1]$
	$g:=m1+t\cdot[1\ \ -1\ \ 1]$	$[t+1\ \ 13-t\ \ t+2]$

Aufgabe 4b)

Abstand der beiden Zentren	$\text{norm}(m2-m1)$	18
Kürzester Abstand	$18-2\cdot r$	12
Zentrale durch M_1 und M_2. Parameter mit den Abständen richtig festlegen.	$m1+\frac{3}{18}\cdot(m2-m1)$	$[3\ \ 11\ \ 3]$
2 Punkte	$m1+\frac{15}{18}\cdot(m2-m1)$	$[11\ \ 3\ \ 7]$
Lösung für den Ersatzwert:	$me:=[7\ \ 1\ \ 14]$	$[7\ \ 1\ \ 14]$
Der kürzeste Abstand ist gleich.	$\text{norm}(m1-me)$	18
Punkte, die am nächsten beieinander liegen.	$m1+\frac{3}{18}\cdot(me-m1)$	$[2\ \ 11\ \ 4]$
	$m1+\frac{15}{18}\cdot(me-m1)$	$[6\ \ 3\ \ 12]$

Aufgabe 4c)

Vektor von einem Punkt auf g nach M_2.	$g-m2$	$[t-12\ \ 12-t\ \ t-6]$
Dieser Vektor muss Länge 6 haben.	$\text{solve}(\text{norm}(g-m2)=2\cdot r,t)$	$t=8$ or $t=12$
Neues Kugelzentrum	$g\vert t=8$	$[9\ \ 5\ \ 10]$
Berührpunkt (Mittelpunkt der Zentren)	$\frac{m2+[9\ \ 5\ \ 10]}{2}$	$[11\ \ 3\ \ 9]$
Andere Lösung: Bestimme eine Kugel mit Radius 6 und Zentrum M_2. Schneide diese Kugel mit g.	$(\text{norm}([x\ \ y\ \ z]-m2))^2$	$x^2-26\cdot x+y^2-2\cdot y+z^2-16\cdot z+234$
	g	$[t+1\ \ 13-t\ \ t+2]$

Lösung für den Ersatzwert:	$me-g$ → $[6-t \quad t-12 \quad 12-t]$
Der Punkt auf g ist der gleiche	solve$(\text{norm}(me-g)=6,t)$ → $t=8$ or $t=12$
	$g\|t=8$ → $[9 \quad 5 \quad 10]$
Berührpunkt	$\frac{[9 \quad 5 \quad 10]+me}{2}$ → $[8 \quad 3 \quad 12]$
Kugelgleichung für den anderen Lösungsansatz	$(\text{norm}([x \quad y \quad z]-me))^2$ → $x^2-14\cdot x+y^2-2\cdot y+z^2-28\cdot z+246$

Aufgabe 4d)

Das gesuchte Zentrum ist der Mittelpunkt der beiden Lösungen aus Aufgabe 4c)	$g\|t=10$ → $[11 \quad 3 \quad 12]$
Der Abstand der Zentren ist Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, r die Schenkellänge.	norm$([11 \quad 3 \quad 12]-m2)$ → $2\cdot\sqrt{6}$
Gesuchter Radius mit Pythagoras	$\sqrt{r^2-(\sqrt{6})^2}$ → $\sqrt{3}$
	g → $[t+1 \quad 13-t \quad t+2]$
Anderer Lösungsansatz: Bestimme den Punkt auf g, der am nächsten zu M_2 liegt.	dotP$([1 \quad {}^-1 \quad 1],m2)$ → 20
Normalebene zu g durch M_2.	$x-y+z-20=0$ → $x-y+z-20=0$
Schneiden mit g.	solve$(t+1-(13-t)+t+2-20=0,t)$ → $t=10$
Für den Ersatzwert gibt es den gleichen Lotfusspunkt und den gleichen Abstand.	$g\|t=10$ → $[11 \quad 3 \quad 12]$ norm$(me-[11 \quad 3 \quad 12])$ → $2\cdot\sqrt{6}$

Aufgabe 5a)

a_1) Rechne übers Gegenteil	$1-(0.95)^{10}$ → 0.401263
Anschlussfrage: a_2) Mindestens 90 Spiele	$\text{solve}(1-(0.95)^{n}=0.99,n)$ → $n=89.7811$

Aufgabe 5b)

Speichere die Listen	$x:=\{0,5,10,20,50\}$ → $\{0,5,10,20,50\}$
	$p:=\left\{\frac{2}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right\}$ → $\left\{\frac{2}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right\}$
Rechne zunächst die Auszahlung für ein Spiel	$\text{sum}(p)$ → 1
	$\text{sum}(x\cdot p)$ → $\frac{31}{4}$
Für 4 Spiele minus Einsatz: Durchschnittlicher Verlust: 9 c	$4\cdot \text{sum}(x\cdot p)-40$ → -9

Aufgabe 5c)

Hypothesentest mit Binomialverteilung H_0: p = 0.4 H_1: p > 0.4, weil 30 Nuller mehr sind als die erwarteten 24 = n·p s = 7.46 %, also H_0 beibehalten. Der Verdacht ist nicht berechtigt.	$\sum_{n=30}^{60}\left(\text{nCr}(60,n)\cdot(0.4)^{n}\cdot(0.6)^{60-n}\right)$ → 0.074624

Aufgabe 5d)

Hypothesentest mit Normalverteilung H_0: p = 0.4 H_1: p > 0.4,	
Erwartungswert	$630\cdot 0.4$ → 252.
Standardabweichung	$\sqrt{630\cdot 0.4\cdot 0.6}$ → 12.2963
z = 1.645 für einseitigen Test	$z=1.645$ → $z=1.645$
Also mindestens 273 Nuller.	$252+1.645\cdot 12.296340919152$ → 272.227

Aufgabe 6a)

a_1) Geordnet mit Wiederholung	5^{30} 931322574615478515625
a_2) Ebenso	4^{30} 1152921504606846976
a_3) Verteile die Positionen. Korrekte Antwort: 1 Möglichkeit falsche Antwort: 4 Möglichkeiten "leer": 1 Möglichkeit	$\frac{30!}{15!\cdot 10!\cdot 5!}\cdot 4^{10}$ 488445483480514560

Aufgabe 6b)

Ein Konsument antwortet "Ja", wenn er 1, 5 oder 6 würfelt. Ein Nicht-Konsument antwortet "Ja", wenn er 1 würfelt b_1) $P(K \cap \text{"Ja"})$	$0.08\cdot\frac{3}{6}$ 0.04
P("Ja")	$0.08\cdot\frac{3}{6}+0.92\cdot\frac{1}{6}$ 0.193333
Bedingte Wahrscheinlichkeit P(K | "Ja")	$\frac{0.04}{0.19333333333334}$ 0.206897
b_2) Totale Wahrscheinlichkeit Wie oben für p = 0.08 Total = 0.2 nach p auflösen.	$\text{solve}\left(\frac{p\cdot 3}{6}+\frac{(1-p)\cdot 1}{6}=0.2,p\right)$ $p=0.1$