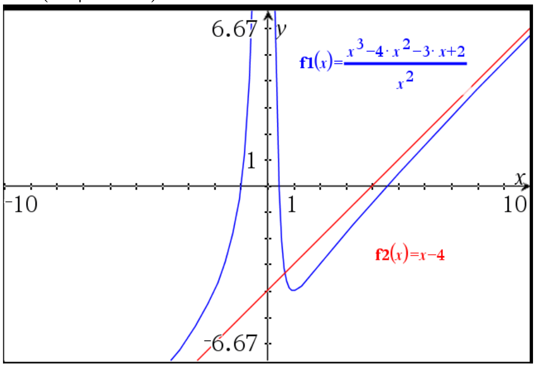
Mathematik-Musterlösung

Klasse 6L — O. Riesen

1. **Kurvenbetrachtungen**

Für jeden Wert von $t \neq 0$ ist eine Kurve $y = f_t(x) = \dfrac{t \cdot x^3 - 4x^2 - 3x + 2}{x^2}$ gegeben.

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$,
vertikale Asymptote $x = 0$, schräge Asymptote $y = x - 4$.
$N_1(\,-1\,|\,0\,)$, $N_2(\,0.438\,|\,0\,)$, $N_3(\,4.562\,|\,0\,)$ bzw. $N_{2,3}(\,\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}\,|\,0\,)$.
$M(\,1\,|\,-4\,)$ ist Minimum, weil $f''(1) = 6 > 0$.
$W(\,2\,|\,-3\,)$



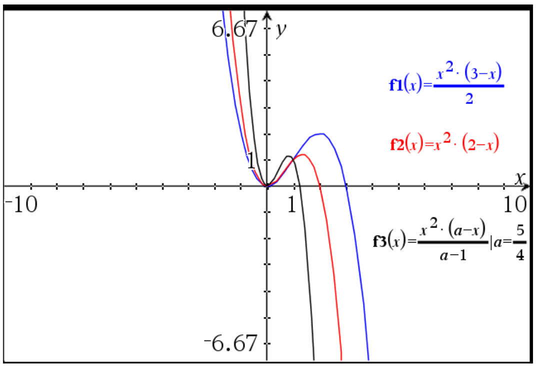
b) Tangente $y = m \cdot x + \dfrac{1}{2}$ muss $f(x)$ berühren.
$y = f_3(x) = \dfrac{3x^3 - 4x^2 - 3x + 2}{x^2} = m \cdot x + \dfrac{1}{2}$ und $y'(x) = m$.
Löse das Gleichungssystem.
$y = \dfrac{17}{4}x + \dfrac{1}{2}$ mit $B(\,-2\,|\,-8\,)$ oder $y = \dfrac{-15}{4}x + \dfrac{1}{2}$ mit $B(\,\dfrac{2}{3}\,|\,-2\,)$

c) Asymptote ist $y = t \cdot x - 4$ mit Steigung t. Also $t = \tan(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

d) Wendepunktskoordinaten $W(\,2\,|\,2t - 5\,)$.
Steigung im Wendepunkt $m = \dfrac{4t + 1}{4}$.
Einsetzen bei $y = m \cdot x + v$.
Das ergibt $v = -\dfrac{11}{2}$.
Wendetangente $y = \dfrac{4t + 1}{4} \cdot x - \dfrac{11}{2}$.
Also gehen alle Wendetangenten durch $P(\,0\,|\,-\dfrac{11}{2}\,)$.

2. **Flächenberechnungen**

Gegeben ist die Funktion $y = f_a(x) = x^2 \cdot \dfrac{a-x}{a-1}$ mit dem Parameter $a > 1$.



a) Nullstellen $(\,0\,|\,0\,)$ und $(\,3\,|\,0\,)$

a$_1$) Funktion $y = f_3(x) = x^2 \cdot \dfrac{3-x}{2} = \dfrac{3}{2} \cdot x^2 - \dfrac{1}{2} \cdot x^3$.

$$\int_0^3 \left(\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3\right) dx = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{1}{8} \cdot x^4 \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{81}{8} = \frac{27}{8}.$$

a$_2$) $f_2(x) = f_3(x)$ ergibt die Schnittpunkte $(\,0\,|\,0\,)$ und $(\,1\,|\,1\,)$.
(y-Koordinaten sind nicht verlangt.)
$f_2(x)$ hat noch die Nullstelle $(\,2\,|\,0\,)$.

Linke Teilfläche: $\displaystyle\int_0^1 f_3(x)\,dx + \int_1^2 f_2(x)\,dx = \frac{3}{8} + \frac{11}{12} = \frac{31}{24}$.

Rechte Teilfläche: $\dfrac{27}{8} - \dfrac{31}{24} = \dfrac{25}{12}$.

Das gibt ein Verhältnis von 31 : 50

b) $f_{\frac{5}{4}}(x) = -x^2 \cdot (4x - 5)$.
$f_{\frac{5}{4}}(x) = f_2(x)$ ergibt die Schnittpunkte $(\,0\,|\,0\,)$ und $(\,1\,|\,1\,)$.
(y-Koordinaten sind nicht verlangt.)
$$V = \pi \cdot \int_0^1 f_{\frac{5}{4}}(x)^2\,dx - \pi \cdot \int_0^1 f_2(x)^2\,dx = \frac{13}{21}\pi - \frac{29}{105}\pi = \frac{12}{35}\pi.$$

c) $f_a(x)$ hat die Nullstellen $(\,0\,|\,0\,)$ und $(\,a\,|\,0\,)$.
Also $F(a) = \displaystyle\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{a^4}{12 \cdot (a-1)}$.

Das Minimum ergibt sich als Nullstelle der 1. Ableitung, $F'(a) = 0$, somit $a = \dfrac{4}{3}$.

Einsetzen ergibt $F_{min} = \dfrac{64}{81}$.

3. **Vektorgeometrie**

Gegeben sind die Gerade g :$(\,5\,|\,-9\,|\,3\,)\ \ (\,7\,|\,-11\,|\,4\,)$, die Ebene $\varepsilon : 2x+y+3z+15 = 0$ und die Kugel $k : x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 14y - 20z - 51 = 0$.

a) $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $g \cap \varepsilon$ ergibt $t = -5$ und $S(\,-5\,|\,1\,|\,-2\,)$.

Winkel zwischen $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\arccos(\dfrac{\vec{n} \cdot \vec{r_g}}{||\vec{n}|| \cdot ||\vec{r_g}||})$.

Das ergibt $\beta = 63.549°$ und somit $\alpha = 26.451°$

b) Von Hand: $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 10)^2 = 225$. Also $M(\,-5\,|\,7\,|\,10\,)$, $r = 15$.
Ersatzwert $M(\,-4\,|\,8\,|\,9\,)$ und gleicher Radius $r = 15$

c) Bestimme den Lotfusspunkt von M auf ε. Das ist das Zentrum.
Den Radius erhält man mit Pythagoras.

$l : \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cap \varepsilon$ ergibt $t = -3$ und das Zentrum $Z(\,-11\,|\,4\,|\,1\,)$.

$||MZ|| = d = 3 \cdot \sqrt{14}$. $r_{Kreis} = \sqrt{r^2_{Kugel} - d^2} = 3 \cdot \sqrt{11}$.

Mit dem Ersatzwert gibt es ebenfalls $t = -3$, aber $Z(\,-10\,|\,5\,|\,0\,)$.
$||MZ|| = d = 3 \cdot \sqrt{14}$. $r_{Kreis} = \sqrt{r^2_{Kugel} - d^2} = 3 \cdot \sqrt{11}$.

d) r_g hat Länge 3, die Kugel Radius 15.
Also $\pm 5 \cdot r_g$ in M anhängen, was die Berührpunkte ergibt.
$B_1(\,5\,|\,-3\,|\,15\,)$, $B_2(\,-15\,|\,17\,|\,5\,)$.

Die Ebenen haben den Normalenvektor $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, und im Übrigen ändert nur die Konstante.
Für B_1: $2x - 2y + z - 31 = 0$, für B_2: $2x - 2y + z + 59 = 0$.

Andere Variante mit HNF: Gesucht ist die Ebene $2x - 2y + z + d = 0$ so, dass M zu dieser Ebene Abstand 15 hat.

$$\frac{2 \cdot -5 - 2 \cdot 7 + 10 + d}{3} = \pm 15.$$

Das ergibt $d = -31$ oder $d = 59$ und somit die gesuchten Ebenen.

Mit dem Ersatzwert erhält man $B_1(\,6\,|\,-2\,|\,14\,)$, $B_2(\,-14\,|\,18\,|\,4\,)$.
Ebenen: Für B_1: $2x - 2y + z - 30 = 0$, für B_2: $2x - 2y + z + 60 = 0$.

4. **Pyramide**

Man kennt $A(\,-1\,|\,2\,|\,3\,)$, $B(\,5\,|\,3\,|\,5\,)$ und $M(\,3\,|\,5\,|\,4\,)$ sowie die Länge $h = \overline{MS} = 45$.

a) $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{MC}$, also $C(\,7\,|\,8\,|\,5\,)$.

$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{MD}$, also $D(\,1\,|\,7\,|\,3\,)$.

$\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ zeigt in Richtung MS.

Er hat Länge 15, sollte aber 45 haben, also mit Faktor 3 strecken.

$\overrightarrow{MS} = \pm \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 42 \end{pmatrix}$, somit $S_1(\,-12\,|\,11\,|\,46\,)$ oder $S_2(\,18\,|\,-1\,|\,-38\,)$.

b) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 1/3 \cdot ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|| \cdot 45 = 450$.

c) Man hat eine zentrische Streckung mit Faktor $\frac{1}{4}$ von S aus.

Damit werden alle Seiten geviertelt und das Volumen beträgt $\frac{1}{64}$ vom ursprünglichen Volumen.

$\overrightarrow{S_1M} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ -42 \end{pmatrix}$. Davon $\frac{1}{4}$ ergibt $\begin{pmatrix} 3.75 \\ -1.5 \\ -10.5 \end{pmatrix}$.

In S_1 anhängen, ergibt $M'(\,-8.25\,|\,9.5\,|\,35.5\,)$.

$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor auf ε, also $\varepsilon : -5x + 2y + 14z - 557.25 = 0$.

Für S_2 erhält man $M'(\,14.25\,|\,0.5\,|\,-27.5\,)$ sowie $\varepsilon : -5x + 2y + 14z + 455.25$.

5. **Tulpen**

Es gibt Tulpen in den Farben rot, gelb, grün und weiss.
Tulpen gleicher Farbe sind *un*unterscheidbar.

a) $\dfrac{24!}{10! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 2!}$

b) Wahrscheinlichkeit für mindestens 21 grüne. $\displaystyle\sum_{x=21}^{40} \frac{\binom{100}{x} \cdot \binom{150}{40-x}}{\binom{250}{40}} = 0.0575$

c) Rote und gelbe Tulpen.

c_1) $0.65 \cdot 0.95 = 0.6175$

c_2) $P(A|B) = \dfrac{0.35 \cdot 0.85}{0.65 \cdot 0.95 + 0.35 \cdot 0.85} = 0.3251.$

c_3) Rote: $n = 200, p = 0.95$, also $E(rote) = 190$
Gelbe: $n = 250, p = 0.85$, also $E(gelbe) = 212.5$
Erlös: $190 \cdot 2.20 + 212.5 \cdot 2.40 = 928$ Gulden.

6. **Vereinsausflug**

Für jedes Vereinsmitglied betrage die Wahrscheinlichkeit, sich für den Ausflug anzumelden, 80%.

a) Binomialverteilung: $\sum_{x=40}^{45} \binom{45}{x} \cdot 0.8^x \cdot 0.2^{45-x} = 0.0902$

b) $n = 63, p = 0.8, \mu = 50.4$. Prüfe für 50 und 51:
$\binom{63}{50} \cdot 0.8^{50} \cdot 0.2^{13} = 0.1224$
$\binom{63}{51} \cdot 0.8^{51} \cdot 0.2^{12} = 0.1248$
Also sind es 51 Teilnehmende.

c) Overbooking-Problem: n gesucht.
$\mu = 0.8 \cdot n$, $\sigma = \sqrt{0.8 \cdot 0.2 \cdot n}$, $x = 240$.
Es muss $\Phi(z) = 0.985$ sein, somit $z = 2.17$.
Setze alles bei $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ein. $n = 281.8$.
Also dürfen es maximal 281 Mitglieder sein.

d) Hypothesentest: $H_0 : p = 0.8$, $H_1 : p > 0.8$.
$n = 560$, $\mu = 560 \cdot 0.8 = 448$, $\sigma = \sqrt{560 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 9.466$.
Für $\alpha = 5\%$ hat man $z = 1.645$.
Also $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = 1.645$, somit $x = 463.5$.
H_0 ist zu verwerfen, sobald 464 oder mehr Anmeldungen vorliegen.