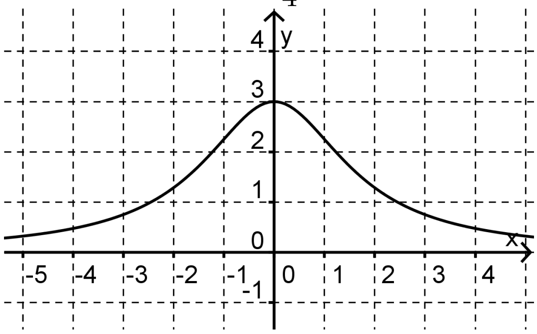
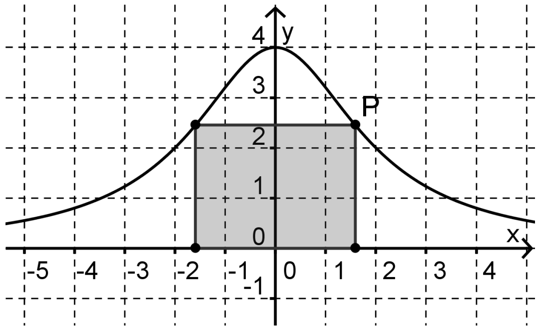
Mathematik-Musterlösung

Klasse 6H O. Riesen

1. **Kurvenbetrachtungen**

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Asymptote $y = 0$
$f_3'(x) = \dfrac{-18x}{(x^2+3)^2}$, $f_3''(x) = \dfrac{54 \cdot (x^2-1)}{(x^2+3)^3}$.
keine Nullstellen, Maximum$(\,0\,|\,3\,)$, weil $f_3''(0) = -2 < 0$.
Wendepunkte $(\,\pm 1\,|\,\dfrac{9}{4}\,)$. Das Bild links zeigt den Funktionsgraphen.



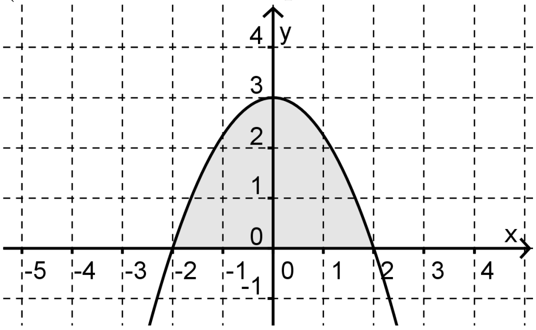


b) Siehe die Grafik rechts. Koordinaten von $P(\,x\,|\,\dfrac{16}{x^2+4}\,)$.
Fläche des Rechtecks $F = 2x \cdot \dfrac{16}{x^2+4}$
Also muss $F'(x) = 0$ sein. Das ergibt $x = 2$ und somit $F_{max} = 8$.
Gesamtfläche $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_4(x)\,dx = 8 \cdot \pi$.
Also ist der prozentuale Anteil $\dfrac{1}{\pi} = 31.83\,\%$.

c) $f_t''(x) = 0$ ergibt $x = \pm\dfrac{\sqrt{3t}}{3}$. Nur $x > 0$ betrachten. Also $W(\,\dfrac{\sqrt{3t}}{3}\,|\,\dfrac{3t}{4}\,)$.
Steigung der Kurve $m_t = f_t'(\dfrac{\sqrt{3t}}{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3t}}{8}$.
Also ist die Steigung der Normalen $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9\sqrt{t}}$.
Alles in $y_W = m_n \cdot x_W + v$ einsetzen. Das ergibt $v = \dfrac{27t-32}{36}$.
Gleichung der Kurvennormalen: $y = \dfrac{8\sqrt{3}}{9\sqrt{t}} \cdot x + \dfrac{27t-32}{36}$
Die Ursprungsgerade hat man für $v = 0$ und somit $t = \dfrac{32}{27}$.

2. **Eine Parabel**

(Eine Skizze für beispielsweise $t = 2$ ist empfehlenswert.)



a) $f_t(x) = 0$ ergibt die Nullstellen $x = \pm t$.
$f_t'(t) = \dfrac{-12}{t^2}$. Das muss $= -1$ sein, also $t = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

b) $\int_{-t}^{t} = 8$, weil:

$$2 \cdot \int_0^t \left(-\frac{6}{t^3} \cdot x^2 + \frac{6}{t} \right) dx = 2 \cdot \left[-\frac{2}{t^3} \cdot x^3 + \frac{6}{t} \cdot x \right]_0^t = 2 \cdot \left[-\frac{2}{t^3} \cdot t^3 + \frac{6}{t} \cdot t \right] - 0 =$$

$$= 2 \cdot \left[-2 + 6 \right] = 8$$

(Bei der oberen Grenze kürzen sich die t weg, bei der unteren Grenze ist alles =0.)

c) $\pi \cdot \displaystyle\int_{-t}^{t} f_t^2(x)\,dx = \frac{192\pi}{5t}$ muss 3π sein. Das ergibt $t = \dfrac{64}{5} = 12.8$.

d) Setze $f_t(x) = x^2$ für die Schnittpunktskoordinaten. $x_1 = -\dfrac{\sqrt{6} \cdot t}{\sqrt{t^3 + 6}}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{6} \cdot t}{\sqrt{t^3 + 6}}$.
Jetzt muss $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} (f_t(x) - x^2)\,dx = \frac{8}{3}$ sein. Das ergibt $t = 2 \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 3.6342$.

3. **Parallelogramme (Vektorgeometrie)**

a) a$_1$) $C(\,6\,|\,9\,|\,-3\,)$

$\vec{BA} = \vec{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $D(\,9\,|\,3\,|\,3\,)$

a$_2$) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, folglich $\vec{n_\varepsilon} = \vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix}$.

Kürzen ergibt $\varepsilon : 2x + 4y + 3z - 39 = 0$.

a$_3$) $\cos(\beta) = \dfrac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{||\vec{BA}|| \cdot ||\vec{BC}||}$. Das ergibt $\alpha = 69.625°$ und $\beta = 110.375°$.

b) Löse $||\vec{BA}|| = ||\vec{BC}||$.
Das ergibt $t = 1$, $C(\,6\,|\,1\,|\,5\,)$ oder $t = 12$, $C(\,6\,|\,12\,|\,-6\,)$.

c) Löse $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$.
Dann wird $t = \dfrac{15}{2} = 7.5$, $C(\,6\,|\,7.5\,|\,-1.5\,)$

d) Löse $||\vec{BA} \times \vec{BC}|| = 27$.
Das ergibt $t = -6$, $C(\,6\,|\,-6\,|\,12\,)$ oder $t = 3$, $C(\,6\,|\,3\,|\,3\,)$

4. **Kugeln (Thema mit Variationen aus verschiedenen Gebieten)**

a) Quadratisch Ergänzen: k: $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$.
Somit ist $M(\,4\,|\,-3\,|\,1\,)$ und $r=2$.
Setze M in die HNF der Ebene ein:
$\dfrac{x-2y-2z+10}{3}=\dfrac{4-2(-3)-2\cdot 1+10}{3}=6$.
Somit ist der kürzeste Abstand $d=6-r=4$.

b) Prüfe zunächst, wo M liegt. Setze M in die Ebenengleichung ein. Man sieht, M liegt in der Ebene und somit hat der Schnittkreis Radius $r=9$. Man benötigt somit auf dem Lot zur Ebene einen Punkt mit Abstand $\sqrt{15^2-9^2}=12$ zur Ebene.
Weiter hat man $\vec{n_\varepsilon}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ und der hat Länge 3.
Also $\begin{pmatrix}5\\2\\7\end{pmatrix}\pm 4\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$. Zentren $Z_1(\,13\,|\,6\,|\,-1\,)$ und $Z_2(\,-3\,|\,-2\,|\,15\,)$

c) Für die Radien gilt $q=\dfrac{24}{25}=0.96$.
Damit wird $r_{15}=r_1\cdot q^{14}=14.12\,\mathrm{cm}$.
Volumen der grössten Kugeln: $V_1=\dfrac{62500\pi}{3}$. $V_2=18432\pi$.
Somit wird $q_V=\dfrac{V_2}{V_1}=0.96^3$.
Setze alles in die Summenformel ein: $V=V_1\cdot\dfrac{1-q_V^{15}}{1-q_V}=477\,373\,\mathrm{cm}^3$.

5. **Glücksrad**

a) Binomialverteilung: $p(NEUTRAL) = \dfrac{19}{25} = 0.76$.

$\sum_{x=0}^{34} \binom{50}{x} \cdot (0.76)^x \cdot (0.24)^{50-x} = 0.1247$.

b) Normalverteilung: $n = 2400, p = \dfrac{1}{25}$, $\mu = n \cdot p = 96$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 9.6$.

$z = \dfrac{100 - 96}{9.6} = 0.4167$.

$1 - \Phi(0.4167) = 1 - 0.6615 = 0.3385$.

c) Jetzt ist $n = 400$, $p = \dfrac{1}{5}$, somit $\mu = 80$ und $\sigma = 8$

$H_0 : p = \dfrac{1}{5}$, $H_1 : p > \dfrac{1}{5}$, weil $x = 95 > \mu$.

$z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = 1.875$.

Erste Begründung: das ist mehr als der kritische Wert 1.645,

zweite mögliche Begründung: $1 - \Phi(1.875) = 0.0304 < 0.05$.

H_0 verwerfen. Der Verdacht des Spielers ist berechtigt.

Man kann auch mit Binomialverteilung rechnen.

Dann ist $s = \sum_{x=95}^{400} \binom{400}{x} \cdot (\frac{1}{5})^x \cdot (\frac{4}{5})^{400-x} = 0.0370$

d) Overbooking-Problem: n ist gesucht. $\mu = n \cdot \dfrac{1}{25}$, $\sigma = \sqrt{n \cdot \dfrac{1}{25} \cdot \dfrac{24}{25}}$.

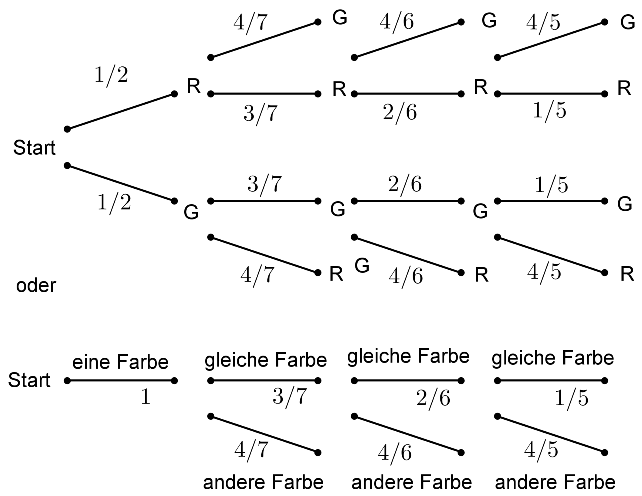
Löse $\dfrac{30 - \mu}{\sigma} = 1.645$ nach n auf. Das ergibt $n = 559.4$.

Also darf das Glücksrad höchstens 559 Mal gedreht werden.

6. **Wer wagt, gewinnt**

a) MISSISSIPPI-Problem: $\dfrac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$

b) b_1) Baumdiagramm.



b_2) Die Wahrscheinlichkeiten sind aus dem Baumdiagramm zu berechnen Spielende nach einer Ziehung: $\frac{4}{7}$, nach zwei Ziehungen: $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$, nach drei: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{35}$ und nach vier Ziehungen: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$.

Nach vier Ziehungen ist ohnehin Schluss.

X	-5	0	5	10
$p(x)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

Man erhält $E(X) = -2$ und $V(X) = 16$.

b_3) Das Spiel lohnt sich für den Veranstalter. $E(X) < 0$

c) Entweder betrachtet man die Auszahlung A oder den Spielgewinn G, abhängig vom Einsatz e. Die Tabellen sehen wie folgt aus:

A	0	10	25	45
$p(a)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

G	$-e$	$10-e$	$25-e$	$45-e$
$p(g)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

Dann wird $E(A) = 7$ resp. man setzt $E(G) = 0$ und erhält den nötigen Einsatz von 7 Dukaten.