

# Anwendungen der Mathematik

Ergänzungsfach

O. Riesen

## 1. Komplexe Arithmetik

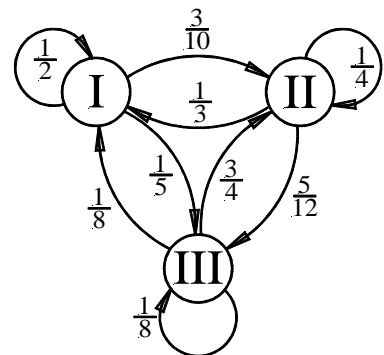
Löse die folgenden Gleichungen in komplexen Zahlen.

Der Lösungsweg ist ausführlich zu dokumentieren (wie wenn ohne Taschenrechner gerechnet würde). Die Lösungen dürfen in Polarform *oder* rechtwinkliger Form angegeben werden. Verwende die angenehmere Form.

- $3z = 2 - i \cdot z$
- $z^5 = -32 \cdot i$  (Bestimme alle Lösungen.)
- $z^2 + 4z + 2 \cdot i \cdot z + 4 \cdot i + 2 = 0$

## 2. Lineare Algebra (Markow-Ketten)

In einem Betrieb hat es drei Kantinen. Langfristige Untersuchungen haben ergeben, dass sich die "Gästekbewegung" fürs Mittagessen wie dargestellt verhält. (z.B: Ein Gast, der heute in der Kantine III isst, isst mit W'keit  $\frac{3}{4}$  morgen in der Kantine II usw.)



- Angenommen, heute essen 20 Personen in der Kantine I, 72 Personen in der Kantine II und 48 Personen in der Kantine III. Berechne die "Gästeverteilung" von übermorgen.
- Berechne die stabile Lage. Wie viele Leute müssen in den drei Kantinen essen? (Bestimme die kleinstmögliche Lösung.)
- Angenommen, insgesamt genau 80 Personen essen heute und morgen in den drei Kantinen. Wie muss die Verteilung heute lauten, damit morgen genau 25 Personen in der Kantine I essen? Bestimme alle Lösungen.

## 3. Statistik: z-Test und t-Test

Für die ganze Aufgabe gilt  $\alpha = 5\%$ . Alle Tests sollen zweiseitig erfolgen.

Die vier Teilaufgaben sind voneinander *unabhängig*.

Eine Maschine produziert Metallkugeln mit einem verlangten Durchmesser von 15 mm.

- Der Hersteller gibt an, dass die Maschine mit einer Genauigkeit arbeitet, welche durch  $\sigma = 0.55$  mm festgelegt wird. Eine Überprüfung von 10 Kugeln ergibt einen gemessenen Mittelwert von 14.63 mm. Ist die Angabe des Herstellers zu akzeptieren?
- Für diese Teilaufgabe gilt auch  $\sigma = 0.55$  mm. Eine neuerliche Überprüfung der Maschine durch Messen von 10 Kugeln ergibt einen Mittelwert von  $\bar{x}$  [mm]. In welchem Bereich darf  $\bar{x}$  liegen, damit die Angabe des Herstellers akzeptiert wird?
- Später misst man wieder 10 Kugeldurchmesser mit folgendem Ergebnis. (in mm)

14.77	15.08	14.68	15.26	14.56	14.73	14.70	14.85	15.06	14.71
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Wird der gewünschte Durchmesser von 15 mm statistisch bestätigt oder widerlegt?

- Angenommen, 10 weitere Messungen ergeben einen Mittelwert von  $\bar{x} = 15.25$  mm. Wie gross muss die Standardabweichung  $s$  dieser 10 Messungen sein, damit der gewünschte Durchmesser von 15 mm statistisch bestätigt wird?

#### 4. Differentialgleichung

Gegeben ist die Differentialgleichung  $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x}{4}$ .

- Zeichne das Richtungsfeld. Die Steigung ist in den markierten Punkten zu skizzieren. (Ein vorbereitetes Koordinatensystem befindet sich auf einem Zusatzblatt.)
- Löse die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung  $y(4) = 3$ . (Dokumentiere den Lösungsweg ausführlich; wie wenn ohne Taschenrechner gerechnet würde.)

#### 5. Komplexe Abbildung

Das Einheitsquadrat in der komplexen Ebene hat die Eckpunkte 0, 1,  $1 + i$  und  $i$ .

Bestimme das Bild des Einheitsquadrates bei der komplexen Abbildung  $w = \sqrt{z}$ .

##### Hinweise und Lösungsschritte:

Bestimme zuerst die Bildkurven der vier *Geraden*, welche das Einheitsquadrat begrenzen. Vorsicht: Die Wurzelfunktion ist im Komplexen nicht eindeutig. Wähle daher in der Bildebene ( $w$ -Ebene) nur Punkte, für welche  $\operatorname{Re}(w) \geq 0$  ist.

Zeichne dann eine genügend grosse Figur. (Wähle für die Einheit mindestens 2 cm.)

Um was für Kurven handelt es sich bei den Bildkurven? (Gefragt ist nur die Art der Kurven; ohne Beweis.)

Markiere zuletzt das Bild des Einheitsquadrates.

#### 6. Ein Vergleich von Kurven

Eine ebene Kurve ist auf drei Arten gegeben:

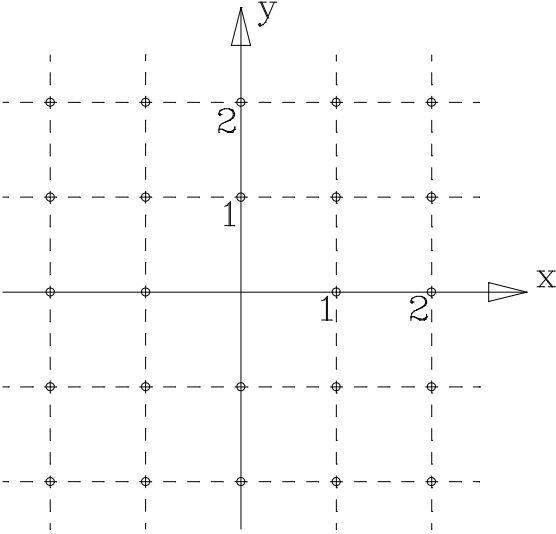
$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{b) } \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t}} \end{cases} & \text{c) } r(\varphi) = \tan(\varphi) \end{array}$$

Weise nach, dass es sich "im Wesentlichen" um dieselbe Kurve handelt.

Vorsicht: es gibt nicht immer dieselbe Punktmenge. Beschreibe genau, welche Kurvenbogen zu welcher Darstellung gehören.

\*\*\*\*\*

Koordinatensystem für das Richtungsfeld (Aufgabe 4a)



(Reserven, für den Fall, dass sich jemand so verzeichnet, dass ein Ausradieren nicht lohnt.)

