Kantonsschule Zug Matura 2007

Anwendungen der Mathematik

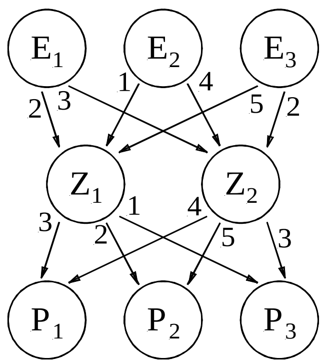
Ergänzungsfach O. Riesen

1. **Komplexe Zahlen**

   Eine komplexe Zahlenfolge ist wie folgt rekursiv definiert: $z_{n+1} = (z_n)^2 + \frac{i}{3}$

   a) Setze den Startwert $z_1 = 0$. Berechne z_2, z_3, ... z_6 sowie den Grenzwert dieser Folge.
   b) Setze den Startwert $z_1 = -0.8 + 0.1 \cdot i$.
   Strebt die Folge gegen denselben Grenzwert wie die obige mit Startwert $z_1 = 0$?
   c) Die betrachteten Folgen haben nebst dem Grenzwert noch einen anderen Fixpunkt. Berechne diesen Fixpunkt. (Löse mit exakten Werten; keine Näherungswerte!)
   d) Die Zahl $z = 1.077 - 0.289 \cdot i$ liegt relativ nahe beim Fixpunkt. Beschreibe die Folge, wenn diese Zahl $z_1 = 1.077 - 0.289 \cdot i$ als Startwert verwendet wird.

2. **Produktionsprozesse (Lineare Algebra)**

   Aus drei Einzelteilen E_1, E_2 und E_3 werden Zwischenprodukte Z_1 resp. Z_2 und daraus die Produkte P_1, P_2 und P_3 hergestellt. Der Graph zeigt die benötigten Stückzahlen.
   a) Bestimme die Produktionsmatrix.
   b) Kostenrechnung. Die Kosten (Material plus Herstellungskosten) betragen: [alle Angaben in Franken]
      - für die Einzelteile 12.– pro E_1, 15.– pro E_2 und 10.– pro E_3
      - für die Zwischenprodukte 8.– pro Z_1 und 13.– pro Z_2.
      - für die Produkte 26.– pro P_1, 38.– pro P_2 und 24.– pro P_3.

      Berechne die Gesamtkosten, welche pro Produkt P_1 resp. P_2 resp. P_3 anfallen.
   c) Restpostenverwertung. Im Lager befinden sich noch 290 Einzelteile E_1, 325 E_2 und 329 E_3. Wie viele Produkte P_1, P_2 resp. P_3 kann man damit noch herstellen?
   Bestimme alle ganzzahligen Lösungen für vollständige Restpostenverwertung.

3. **Regressionsrechnung**

   In einem chemischen Experiment wird eine Sättigungskurve gemessen. Dabei ergeben sich die folgenden Daten:

Zeit [in s]	0	5	10	15	20	30	40	60
Sättigung [in %]	5.0	22.0	35.0	45.5	53.0	64.0	70.0	76.5

   a) Vorerst nimmt man an, dass sich die Sättigungskurve exponentiell dem Wert 100% annähert. Nach sehr langer Zeit sollte also theoretisch eine Sättigung von 100% erreicht werden.
   Bestimme die Regressionskurve inkl. zugehörigem Korrelationskoeffizienten R^2 und ermittle, nach welcher Zeit eine Sättigung von 60% erreicht wird.
   b) Die obige Regressionsrechnung kann man verbessern, indem man annimmt, dass sich die Kurve exponentiell nur 90% oder sogar nur 80% annähert. Bestimme die beiden zugehörigen Regressionskurven inkl. zugehörigem R^2 und ermittle (für beide Kurven), nach welcher Zeit eine Sättigung von 60% erreicht wird.
   Welche der drei Regressionskurven ist die beste?

4. **Statistik: χ^2-Test**

Ein Biologe züchtet Erbsen. Für eine Untersuchung fallen folgende zwei Kriterien in Betracht: einerseits die Farbe (grün, gelb, braun), andererseits die Oberfläche (glatt, geschrumpft). Eine Zählung vieler Erbsen ergab die folgende Tabelle:

	grün	gelb	braun
glatt	332	118	200
geschrumpft	188	90	112

a) Teste diese Daten mit einem χ^2-Test auf Abhängigkeit oder Unabhängigkeit. Bestimme die Randhäufigkeiten, die Soll-Werte und den χ^2-Wert.

b) Später stellt der Biologe fest, dass er die grünen Erbsen richtig gezählt hat, aber bei den gelben und braunen etwas vertauscht hat. Leider hat er die Erbsen nicht mehr. Die Tabelle sieht nun vorerst so aus:

	grün	gelb	braun
glatt	332	x	
geschrumpft	188		

Welche Werte von x lassen *bei gleichbleibenden Randhäufigkeiten* darauf schliessen, dass die beiden Kriterien unabhängig sind?

5. **Eine Differentialgleichung**

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = \frac{x^2 - 1}{y}$.

a) Löse die Differentialgleichung. (Dokumentiere den Lösungsweg ausführlich.)

b) Betrachte die fünf Kurven zu den folgenden Anfangsbedingungen:

$y_1(-3) = 0 \quad y_2(-\tfrac{5}{2}) = 0 \quad y_3(-2) = 0 \quad y_4(-\tfrac{3}{2}) = 0 \quad y_5(-1) = 0$

Zeichne die 5 zugehörigen Kurven in das vorgegebene Koordinatensystem (siehe auf einem separaten Blatt). Vergleiche und beschreibe diese Kurven möglichst genau. (Gemeinsamkeiten? Unterschiede?)

6. **Drehstreckungen (Matrixrechnung)**

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Diese Matrizen sind Abbildungsmatrizen von zwei Drehstreckungen. Berechne die Streckungsfaktoren und die Drehwinkel.

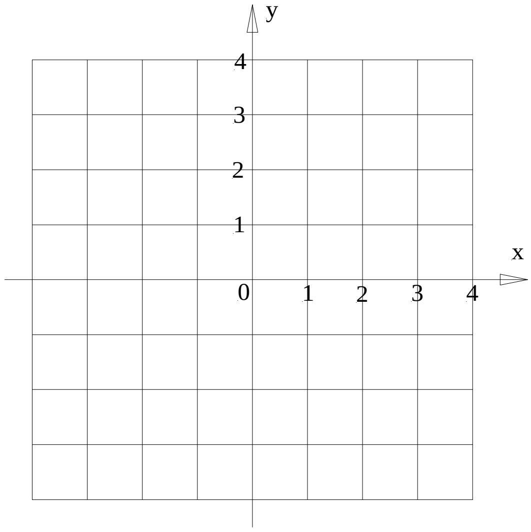
b) Berechne das Produkt A·B. Um was für eine Abbildung handelt es sich dabei?

c) Berechne das Produkt B·A und verifiziere, dass hier das Kommutativgesetz gilt.

d) Beweise allgemein: Wenn zwei Matrizen je eine Drehstreckung darstellen, dann ist das Matrixprodukt kommutativ.

****

Koordinatensystem für die Aufgabe 5.



(Reserven, für den Fall, dass sich jemand so verzeichnet, dass ein Ausradieren nicht lohnt.)