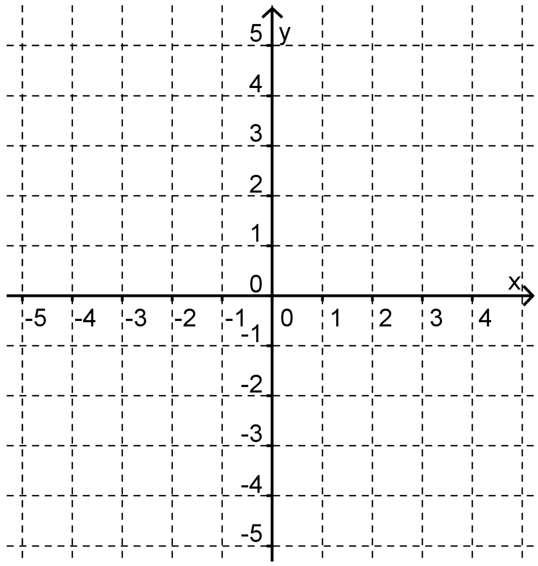
Quadratische Funktionen

1. Funktionsgleichung und Funktionsgraph

1.1. Funktionsgraphen im Koordinatensystem

1. **Bemerkung**
   In einem früheren Kapitel haben wir lineare Funktionen betrachtet, d.h. Funktionen, deren Funktionsgleichung $y = f(x) = m \cdot x + v$ linear ist.
   In diesem Kapitel betrachten wir quadratische Funktionsgraphen. In der allgemeinen Form sieht dann die Funktion wie folgt aus: $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

2. **Eine quadratische Funktion**
   Gegeben ist $y = f(x) = x^2$.
   Wir stellen eine Wertetabelle her und skizzieren den Funktionsgraphen.



   Zur Gestalt dieser Kurve: ....

   ....

   ....

3. **Beispiele aus dem Alltag**
   Es gibt verschiedene Anwendungen, bei denen Parabeln vorkommen:

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. **Verändern der Funktionsgleichung**

Nun verändern wir die Gleichung der Parabel.

a) $y = f(x) = x^2 - 3$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									

b) $y = f(x) = (x-2)^2$

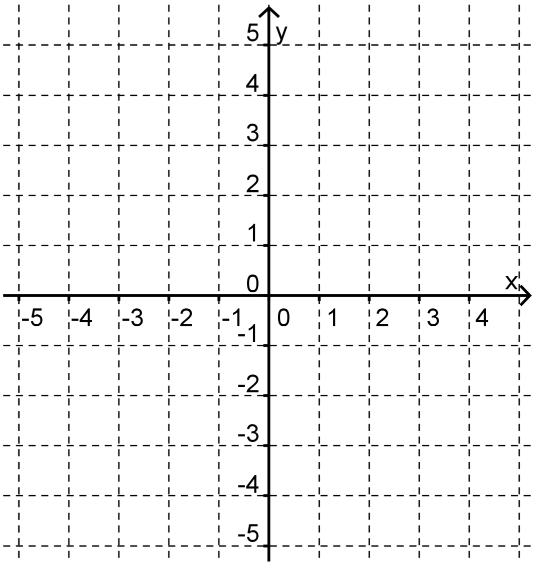
$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									

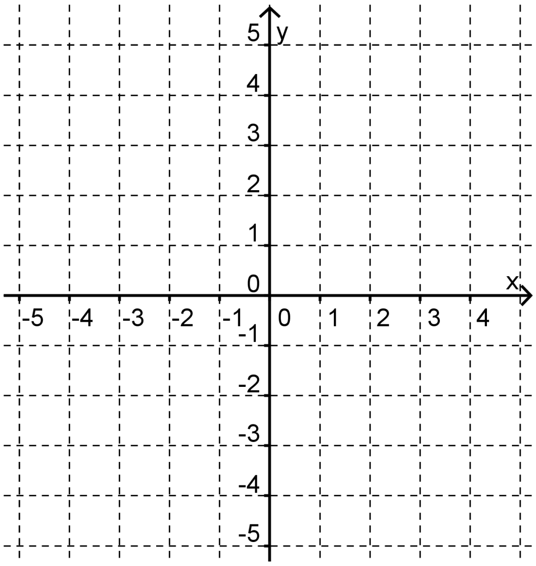
c) $y = f(x) = (x+1)^2$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									

d) $y = f(x) = (x+3)^2 - 4$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									





5. **Satz**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. **Verändern der Funktionsgleichung, 2. Teil**

Jetzt kommen Faktoren vor dem x^2 dazu:

a) $y = f(x) = 2 \cdot x^2$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									

b) $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

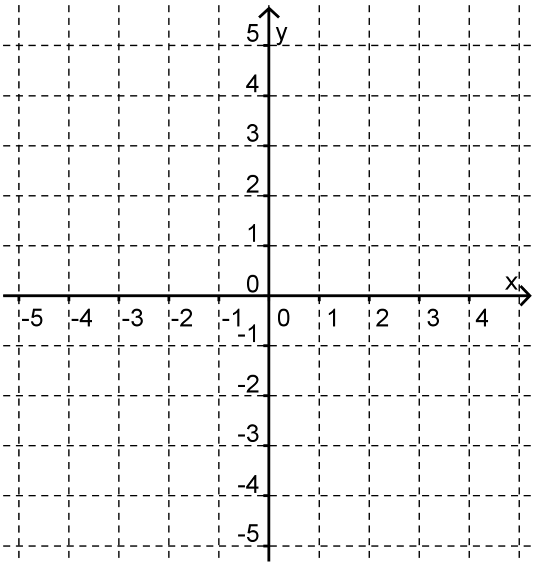
$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									

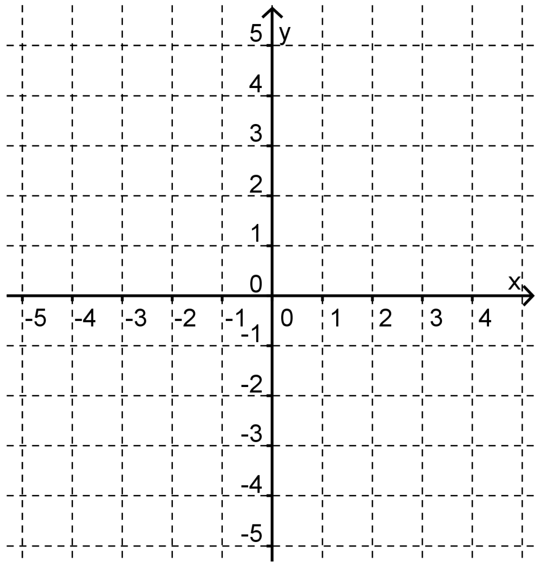
c) $y = f(x) = -x^2$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									

d) $y = f(x) = -4 \cdot x^2$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									





7. **Satz**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

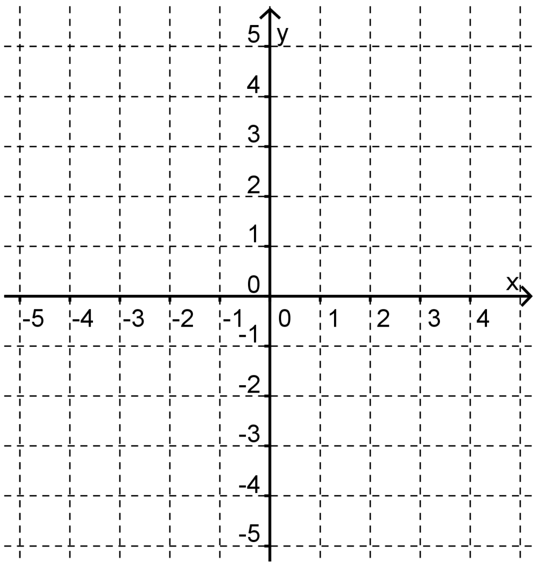
8. **Verändern der Funktionsgleichung, 3. Teil**

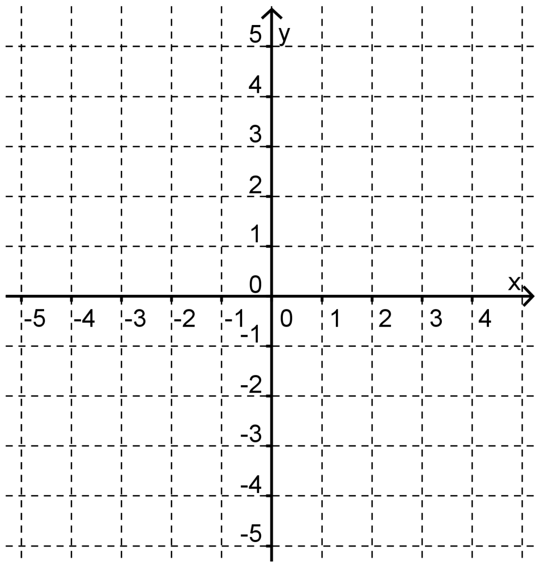
a) $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 - 3$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									

b) $y = f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x+2)^2 + 4$

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$									





9. **Beachte die Reihenfolge der Abbildungen**

. . . .

. . . .

10. **Überlegungsaufgabe**

a) Die Normparabel wird zunächst an der x-Achse gespiegelt, dann um 3 nach oben und um 5 nach rechts verschoben. Wie lautet die Funktionsgleichung?

. . . .

b) Die Normparabel wird mit Faktor 3 nach oben gestreckt, dann um 2 nach links und um 4 nach unten verschoben. Wie lautet die Funktionsgleichung?

. . . .

Übung

a) Skizziere die Parabel $y = f(x) = 2 \cdot (x+5)^2 - 7$

b) Wie muss man die Normparabel strecken, verschieben etc., um auf die Parabel zu $y = f(x) = -3 \cdot (x-3)^2 - 3$ zu kommen?

1.2. Besondere Kurvenpunkte

1. **Definition**

2. **Beispiel**
   Wo liegt der Scheitelpunkt? Ist es der höchste oder der tiefste Punkt der Parabel?

   a) $y = f(x) = 5 \cdot (x-3)^2 - 4$

   b) $y = f(x) = -2 \cdot (x+8)^2 + 9$

3. **Die Scheitelpunktsform**

4. **Musterbeispiele**
   Bringe die Funktionsgleichung auf Scheitelpunktsform.

   a) $y = f(x) = x^2 - 4x + 2$

   b) $y = f(x) = 3 \cdot x^2 + 6x - 1$

5. Übungen

Bringe die Funktionsgleichung auf Scheitelpunktsform.

a) $y = f(x) = x^2 + 8x - 25$

b) $y = f(x) = -2 \cdot x^2 + 5x + 3$

c) $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x$

6. Allgemeine Lösung

Wir bestimmen die Scheitelpunktskoordinaten für die allgemeine quadratische Funktion $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

7. **Satz**

   ....

   ....

   ....

8. **Schnittpunkt mit der y-Achse**

   a) In welchem Punkt schneidet $y = f(x) = 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 28$ die y-Achse? ....

   ....

   b) Jede quadratische Funktion $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ schneidet die y-Achse in genau einem Punkt.

   ....

   ....

9. **Definition**

   ....

   ....

   ....

10. **Musterbeispiel**

    Bestimme die Nullstellen der Parabel $y = f(x) = 2x^2 - x - 3$

    Bestimme zusätzlich die Koordinaten des Scheitelpunkts sowie den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse.

11. **Übungen**

Für alle Aufgaben gilt: Bestimme die Nullstellen, den Schnittpunkt mit der y-Achse und die Koordinaten des Scheitelpunkts:

a) $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $y = f(x) = x^2 - x - 6$

c) $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2x + 2$

d) $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 2$

12. **Folgerungen**

a) Hat die Formel für die x-Koordinate des Scheitelpunkts immer eine Lösung?

....

....

b) Gibt es immer einen Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse?

....

....

c) Was gilt, wenn man die Funktionsgleichung faktorisieren kann?

....

....

....

d) Was gilt, wenn eine Parabel nur eine Nullstelle hat?

....

....

....

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Nullstellen und den Koordinaten des Scheitelpunkts?

....

....

Lernkontrolle

Gegeben ist $y = f(x) = 6x^2 - x - 2$.

Bringe die Gleichung auf Scheitelpunktsform und ermittle die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Scheitelpunkt und alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen).

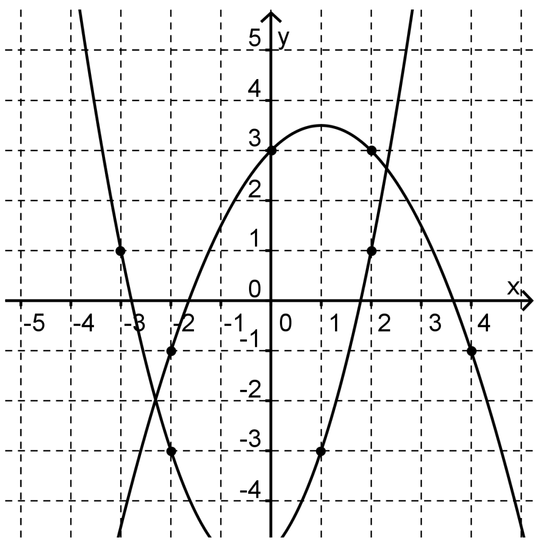
1.3. Funktionsgleichung bestimmen

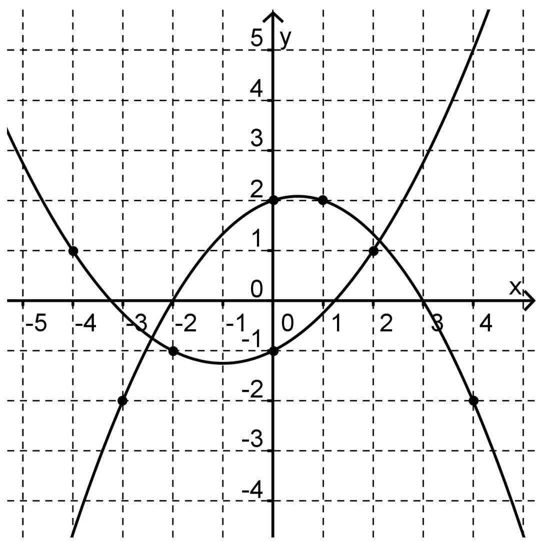
1. **Parabel durch drei Punkte**

   Eine Parabel geht durch die Punkte $(0\,|\,5)$, $(2\,|\,1)$ und $(3\,|\,0)$.
   Bestimme die Funktionsgleichung.

2. **Übungen**

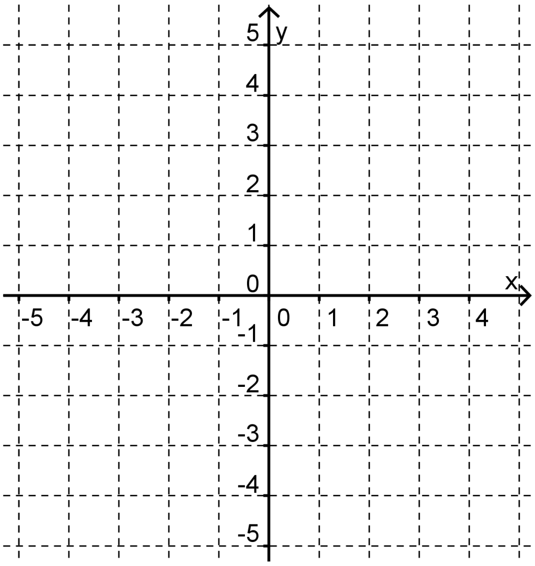
   Bestimme die Funktionsgleichungen der dargestellten Parabeln.
   (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind markiert.)

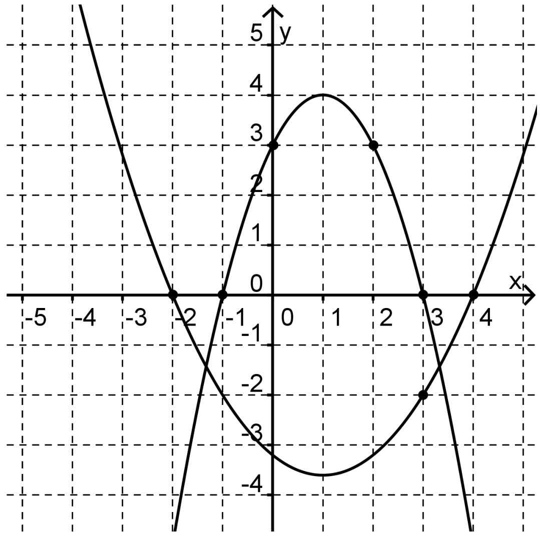




3. **Nullstellenansatz**

Von einer Parabel kennt man die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$ sowie den Punkt $P(3\,|\,1)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

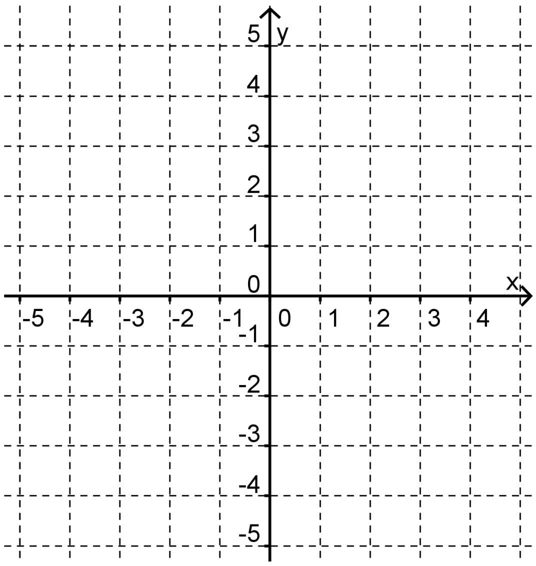


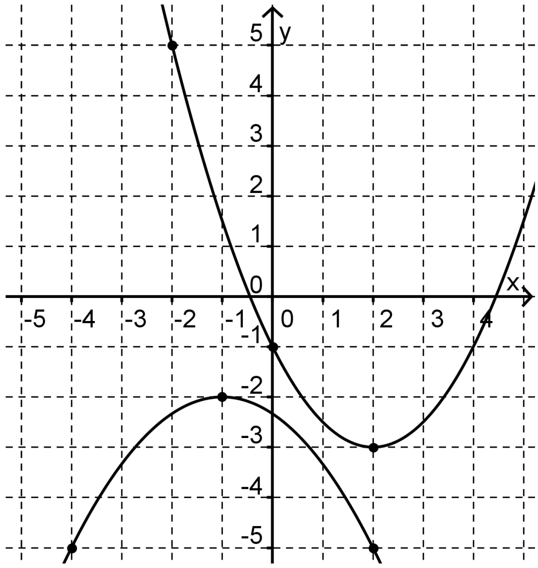


Im Koordinatensystem rechts hat es dazu zwei Übungen.

4. **Ansatz mit Scheitelpunktsform**

Von einer Parabel kennt man den Scheitelpunkt $(4\,|\,1)$ und weiss, dass die Kurve durch $(2\,|\,5)$ geht. Bestimme die Funktionsgleichung.





Im Koordinatensystem rechts hat es dazu zwei Übungen.

5. Zusammenfassung

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Dieser Ansatz geht immer.

Wenn man die Nullstellen x_1 und x_2 bzw. die Punkte $(\, x_1 \,|\, 0 \,)$ und $(\, x_2 \,|\, 0 \,)$ hat, dann kann man den Ansatz $y = f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ machen.

Wenn man die Scheitelpunktskoordinaten $(\, u \,|\, v \,)$ hat, dann kann man den Ansatz $y = f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$ machen.

Die in den drei Ansätzen notierten Variablen a stimmen überein.

Verschiedene Varianten

Bestimme die Gleichung der Parabel. Versuche, mit verschiedenen Varianten zu arbeiten, beispielsweise mit den Punkten A, C, E oder C, D, E oder auch A, B, C.