2. Ebenen

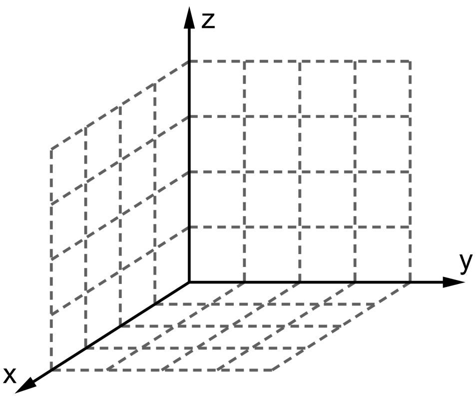
2.1. Ebenengleichungen

1. **Überlegungsaufgabe**

   Welche Möglichkeiten gibt es, mit Hilfe von Punkten und Geraden eine Ebene eindeutig festzulegen?

2. **Musterbeispiel**

   Gegeben sind die drei Punkte
   $A(\,4\,|\,2\,|\,-2\,)$, $B(\,1\,|\,3\,|\,3\,)$
   und $C(\,-1\,|\,-7\,|\,1\,)$.
   Wir wollen alle Punkte beschreiben, welche in der Ebene $\varepsilon = ABC$ liegen.

   (Diese Ebene wird uns in diesem Kapitel als Muster dienen.)

3. **Die Parametergleichung**

   Zu jedem Wertepaar der Parameter s und t gehört genau ein Punkt der Ebene, und umgekehrt.

> **Übung**
>
> Bestimme eine Parametergleichung der Ebene EFG.
> $E(\,6\,|\,-2\,|\,1\,)$, $F(\,-3\,|\,4\,|\,2\,)$, $G(\,5\,|\,7\,|\,8\,)$.

4. **Inzidenz**
   Liegen die Punkte $P(\,2\,|\,-8\,|\,-4\,)$ resp. $Q(\,-2\,|\,4\,|\,5\,)$ in der Ebene ABC?

5. **Herleitung der Koordinatengleichung**

6. **Die Koordinatengleichung**

   Alle Punkte des Raumes, ...

   ....

   ....

Übung
Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene EFG.
$E(\,6\,|\,-2\,|\,1\,)$, $F(\,-3\,|\,4\,|\,2\,)$, $G(\,5\,|\,7\,|\,8\,)$.

7. **Inzidenz**

Liegen die Punkte $P(\,2\,|\,-8\,|\,-4\,)$ resp. $Q(\,-2\,|\,4\,|\,5\,)$ in der Ebene ABC?
Wenn man die Koordinatengleichung hat, dann ist diese Aufgabe deutlich einfacher.

8. **Beispiele**

a) Liegt der Punkt $P(\,3\,|\,-1\,|\,0\,)$ in der Ebene $3x + 4y - z - 4 = 0$?

b) Der Punkt $Q(\,3\,|\,6\,|\,9\,)$ soll in der Ebene $4x - y - 2z + d = 0$ liegen. $d =?$

c) Bestimme t so, dass der Punkt $R(\,2\,|\,t\,|\,4\,)$ in der Ebene $4x+2y-7z-3 = 0$ liegt.

9. **Achsenabschnitte**

Gegeben ist die Ebene ABC mit der Koordinatengleichung $3x - y + 2z - 6 = 0$.
Bestimme die Achsenabschnitte u, v und w.

Für den Schnittpunkt mit der x-Achse gilt: ....

....

Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt: ....

....

Für den Schnittpunkt mit der z-Achse gilt: ....

....

Nun ist es so, dass man die drei Achsenabschnitte in einem Schritt bestimmen kann.

10. **Die Achsenabschnittsform**

. . . .

. . . .

. . . .

11. **Musterbeispiele**

a) Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene $2x - 9y + 5z - 6 = 0$

b) Von einer Ebene kennt man die Achsenabschnitte $u = 2$, $v = -5$ und $w = -\frac{3}{4}$. Bestimme die Koordinatengleichung.

Lernkontrolle

Eine Ebene ε ist durch die Punkte $(5\,|\,0\,|\,0)$, $(0\,|\,-3\,|\,0)$ und $(0\,|\,0\,|\,4)$ festgelegt. Bestimme die Koordinatengleichung von ε und ermittle dann, ob der Punkt $(2\,|\,1\,|\,8)$ in ε liegt.

12. **Spezielle Lagen**

Wenn bei der Koordinatengleichung $ax+by+cz+d=0$ ein Koeffizient (oder mehrere) gleich Null sind, dann hat die zugehörige Ebene spezielle Lage.

a) $3x - 5y - 7 = 0$ ....

....

b) $4y + 12z - 1 = 0$ ....

....

c) $3x - 5y + 8z = 0$ ....

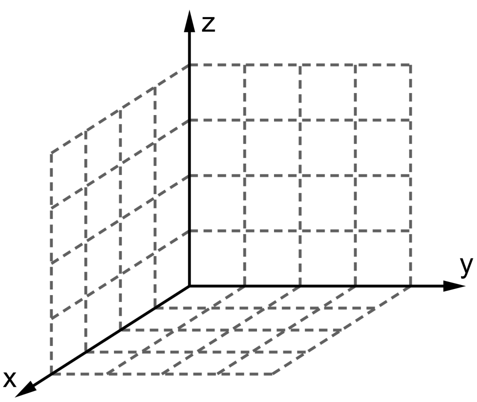
....

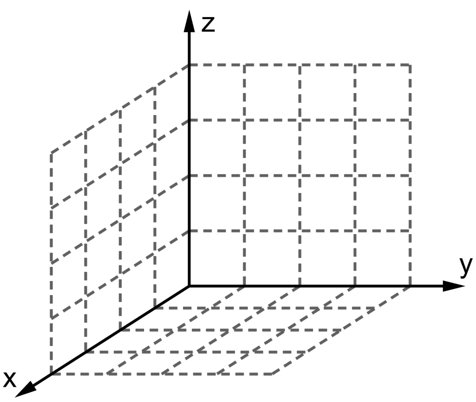
d) $3x - 5y = 0$ ....

....

e) $2z - 7 = 0$ ....

....





2.2. Lot und Normalebene

1. **Der Normalenvektor einer Ebene**

   Gegeben sei eine Ebene durch die Koordinatengleichung: $ax + by + cz + d = 0$.

   Der Normalenvektor auf diese Ebene laute $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$.

2. **Satz**

   Wir halten fest: ....

   ....

   ....

3. **Grundaufgabe**

   Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte $P(\,6\,|\,-2\,|\,8\,)$, $Q(\,1\,|\,3\,|\,0\,)$ und $R(\,3\,|\,-2\,|\,4\,)$.
   Mit dem Wissen über den Normalenvektor ist das Bestimmen der Koordinatengleichung einer Ebene viel einfacher:

4. **Musterbeispiele**

Bestimme die Koordinatengleichung:

a) Die Ebene ist gegeben durch 3 Punkte: $(\,1\,|\,1\,|\,3\,)$, $(\,2\,|\,0\,|\,5\,)$, $(\,-2\,|\,1\,|\,6\,)$.

b) Die Ebene ist gegeben durch die Gerade g und den Punkt $(\,3\,|\,6\,|\,1\,)$.

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Die Ebene ist gegeben durch zwei Parallelen g und h.

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. **Parallelebene**

Bestimme die Parallelebene zur Ebene $3x - 7y + 2z - 8 = 0$ durch $A(\,6\,|\,-2\,|\,1\,)$.

Beachte: ....

....

....

6. **Lot von einem Punkt auf eine Ebene**

Bestimme das Lot vom Punkt $P(\,3\,|\,6\,|\,2\,)$ auf die Ebene $2x + 2y - z + 20 = 0$.

Beachte: ....

....

....

7. **Normalebene**

Von einer Ebene kennt man das Lot l und den Punkt $P(\,3\,|\,6\,|\,2\,)$.
Bestimme die Koordinatengleichung dieser Ebene.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beachte: ....

Übung

Gegeben ist die Strecke AB durch $A(\,2\,|\,7\,|\,9\,)$ und $B(\,3\,|\,4\,|\,2\,)$.
Bestimme die Koordinatengleichungen der beiden Normalebenen zur Strecke AB in den Endpunkten der Strecke.

2.3. Gegenseitige Lage

1. **Zwei Ebenen**

   Gegeben sind zwei Ebenen. Dann bestehen folgende Möglichkeiten der gegenseitigen Lage:

   ....

   ....

2. **Musterbeispiele**

   Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen:

   a) $3x - 2y + 5z - 7 = 0$ und $4x + y - 3z - 1 = 0$ ....

   ....

   b) $2x - y + 4z - 7 = 0$ und $4x - 2y + 8z - 1 = 0$ ....

   ....

   ....

   Wie man den Abstand zweier paralleler Ebenen und die Schnittgerade sowie den Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen berechnet, sehen wir in einem späteren Kapitel.

3. **Eine Gerade und eine Ebene**

   Es gibt folgende Möglichkeiten der gegenseitigen Lage:

   ....

   ....

   ....

4. **Grundaufgabe**

   Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene:

   $$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \varepsilon : 2x + 3y - z - 6 = 0$$

5. **Bemerkungen**

Beim Berechnen eines Schnittpunktes mit einer Geraden können Sonderfälle auftreten.

a) Wenn die entstehende Gleichung für den Parameter t der Geraden keine Lösung hat, dann ist die Gerade zur Ebene parallel. Das kann man allerdings auch vor der Berechnung prüfen:

. . . .

Wie man dann den Abstand der Geraden zur Ebene berechnet, folgt später.

b) Wenn die entstehende Gleichung für den Parameter t der Geraden unendlich viele Lösungen hat, dann liegt die Gerade *in* der Ebene. Dies ist ein Spezialfall von der Situation, dass die Gerade zur Ebene parallel liegt.

. . . .

6. **Übungen**

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

a) $g : (\,7\,|-6\,|\,7\,)\ (\,3\,|\,6\,|-1\,)\ ,\ \varepsilon : 2x - y + 2z - 7 = 0$

b) $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},\ \varepsilon : 3x - y + 4z - 2 = 0$

c) $g : (\,3\,|\,6\,|\,2\,)\ (\,4\,|\,7\,|\,3\,)\ ,\ \varepsilon : 4x - 7y + 3z - 4 = 0$

Lernkontrolle

Gegeben sind die Punkte P, Q, A, B und C.
$P(\,8\,|-1\,|\,3\,)\ ,\ Q(\,6\,|\,0\,|\,1\,)\ ,$
$A(\,1\,|\,1\,|-1\,)\ ,\ B(\,2\,|\,1\,|\,1\,)\ ,\ C(\,0\,|\,3\,|\,3\,)\ .$
Bestimme den Schnittpunkt von PQ durch die Ebene ABC.

2.4. HNF

1. **Musterbeispiel**
   Gegeben ist der Punkt $P(\,9\,|\,3\,|\,-5\,)$ und die Ebene $2x + y - 2z + 5 = 0$.
   Wir berechnen der Reihe nach:

   a) Das Lot von P auf die Ebene.
   b) Den Lotfusspunkt.
   c) Den Abstand von P zur Ebene.

   d) Berechne die Norm des Normalenvektors zur Ebene (Koordinatengleichung).
   e) Setze die Koordinaten von P in der Ebenengleichung ein. Weil P nicht in der Ebene liegt, wird links vom Gleichheitszeichen keine Null herauskommen.

2. **Die Hessesche Normalform HNF**

   Die HNF einer Ebene erhält man, indem man ....

   ....

   ....

   Wenn man die Koordinaten eines Punktes ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. **Beispiel**
   Bestimme den Abstand der Punkte
   $P(1\,|\,1\,|-1)$, $Q(2\,|\,3\,|-3)$, $R(0\,|\,1\,|\,0)$, $S(5\,|\,1\,|-2)$
   zur Ebene $4x - 4y + 7z - 2 = 0$

Übung
Gegeben sind die Punkte P, Q, A, B und C.
$P(8\,|-2\,|\,4)$, $Q(1\,|\,1\,|-1)$,
$A(3\,|\,3\,|\,1)$, $B(1\,|\,0\,|\,3)$, $C(1\,|-3\,|\,1)$.
Bestimme den Abstand von P und von Q zur Ebene ABC.