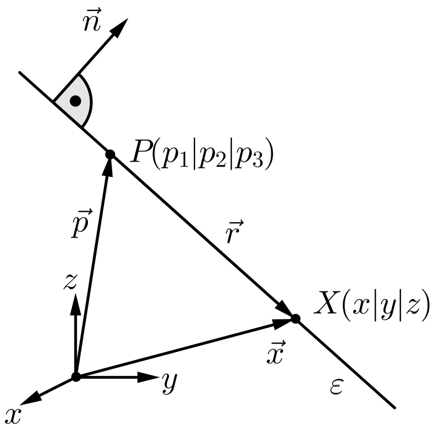
Die HNF einer Ebene

Ein Text zum Studium

1. **Der Normalenvektor einer Ebene**

   Betrachte die nebenstehende Figur: Man hat eine Ebene ε, wobei diese Ebene so gezeichnet ist, dass man sie nur als Strecke sieht (wie wenn man bei einem Blatt nur eine Seite des Blattrandes sieht).
   Von dieser Ebene ε ist die Koordinatengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ gegeben.
   Wir betrachten den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der senkrecht auf diese Ebene steht.



2. **Es gilt der folgende Satz**

   Wenn die Koordinatengleichung der Ebene $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ lautet, dann sind die Koeffizienten von x, y resp. z genau die Komponenten des Normalenvektors auf die Ebene, d.h. es gilt $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Beweis:
   In der obigen Figur bezeichnet $P(\, p_1 \,|\, p_2 \,|\, p_3 \,)$ einen festen Punkt der Ebene, $X(\, x \,|\, y \,|\, z \,)$ eine beliebigen Punkt von ε.
   Dann ist $\overrightarrow{PX} = \vec{r}$ ein beliebiger Richtungsvektor in der Ebene, und der steht sicher senkrecht zu $\vec{n}$.
   Somit muss das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ sein.
   In Komponenten ausgeschrieben heisst das: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix} = 0$.
   Ausrechnen liefert: $n_1 \cdot (x - p_1) + n_2 \cdot (y - p_2) + n_3 \cdot (z - p_3) = 0$.
   Ausmultipliziert und geordnet: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 - n_3 \cdot p_3 = 0$.
   Alle diese Gleichungen gelten für jeden beliebigen Punkt $(\, x \,|\, y \,|\, z \,)$ in der Ebene ε.
   Entscheidend ist nun, dass die Koordinatengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ auch für jeden Punkt der Ebene gilt.
   Somit müssen die Gleichungen für jedes x, y und z übereinstimmen.
   Damit muss $n_1 = a$ sein, ebenso $n_2 = b$ und $n_3 = c$.
   Damit ist bewiesen, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
   Zusätzlich kann man erkennen, dass in der Koordinatengleichung für die Konstante $d = -n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 - n_3 \cdot p_3$ gilt, wobei man sich für P irgend einen Punkt der Ebene denken kann.

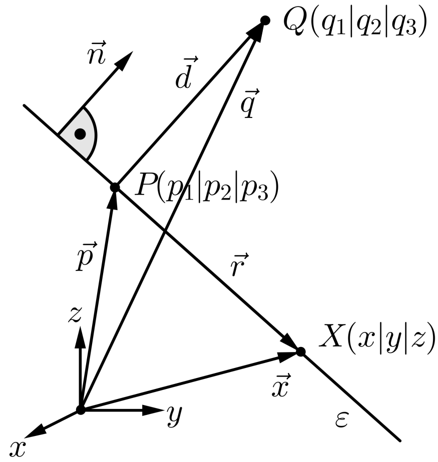
3. **Die Hesse'sche Normalform HNF**

Wir betrachten die Ebene ε, welche durch ihre Koordinatengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ gegeben ist. Die Hesse'sche Normalform HNF dieser Ebene lautet

$$\frac{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Wir bemerken, dass man die HNF erhält, indem man die Koordinatengleichung durch die Länge (Norm) des Normalenvektors dividiert.

Es ist $\|\vec{n}\| = \| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



4. **Abstand eines Punktes zur Ebene**

Es gilt der folgende Satz:

Wenn man die Koordinaten eines Punktes $Q(\, q_1 \,|\, q_2 \,|\, q_3 \,)$ in die HNF einer Ebene einsetzt, dann ergibt die linke Seite der obigen Gleichung (bis auf ein eventuelles Vorzeichen) genau den Abstand des Punktes Q von ε.

Beweis:

In der Figur bezeichnet $\vec{d}$ den Abstandsvektor, dessen Länge gesucht ist.
Somit ist $\vec{d}$ sicher parallel zu $\vec{n}$.
Ferner ist $P(\, p_1 \,|\, p_2 \,|\, p_3 \,)$ der Lotfusspunkt des Lotes von Q auf ε.
Wir betrachten nun das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{d}$. (Wir beginnen die Berechnungen mit diesem Skalarprodukt, damit die Berechnungen möglichst einfach werden.)
Es gilt: $\vec{n} \cdot \vec{d} = \vec{n} \cdot (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{n} \cdot \vec{q} - \vec{n} \cdot \vec{p}$.
Die *linke* Seite dieser Gleichung ist nach Definition des Skalarprodukts $\vec{n} \cdot \vec{d} = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos(\alpha) = \pm\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d}\|$, denn der Zwischenwinkel α zwischen den beiden Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{d}$ ist $0°$ oder $180°$, je nachdem, ob $\vec{n}$ und $\vec{d}$ in gleiche oder verschiedene Richtungen zeigen, und der Cosinus davon ist 1 oder -1.
Die *rechte* Seite dieser Gleichung ist
$\vec{n} \cdot \vec{q} - \vec{n} \cdot \vec{p} = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3 - n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 - n_3 \cdot p_3$
und das ist gleich $a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c \cdot q_3 + d$. (Zum Wert von d siehe unter Punkt 2.)
Also erhalten wir $\pm\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d}\| = a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c \cdot q_3 + d$.
Zuletzt dividieren wir durch $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
und erhalten das gewünschte Ergebnis: $\dfrac{a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c \cdot q_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm\|\vec{d}\|$.
Diese letzte Linie zeigt:
Wir setzen die Koordinaten von Q in die HNF der Ebene ein und erhalten bis auf ein eventuelles Vorzeichen genau den Abstand von Q zu ε.

Zur Frage des Vorzeichens gibt es noch einen Zusatz:

5. **Zusatz**

Wenn das Ergebnis nach dem Einsetzen von Q in die HNF negativ wird, dann liegt der Punkt Q auf der anderen Seite der Ebene als deren Normalenvektor hinzeigt.

Begründung:
Wenn $\vec{n}$ und $\vec{d}$ in die gleiche Richtung zeigen, dann wird der Zwischenwinkel 0°, somit $\cos(0°) = 1$ und damit wird
$\dfrac{a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c \cdot q_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \|\vec{d}\|$ und das Ergebnis ist positiv.
Wenn $\vec{n}$ und $\vec{d}$ in die verschiedene Richtung zeigen, dann wird der Zwischenwinkel 180°, somit $\cos(180°) = -1$ und damit wird
$\dfrac{a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c \cdot q_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = -\|\vec{d}\|$ und das Ergebnis ist negativ.
Man kann sagen, dass jede Ebene den Raum in eine positive und eine negative Seite unterteilt. Der Normalenvektor der Ebene zeigt in die positive Seite.

****