Gesamtrepetition Stochastik

Aufgaben aus früheren Prüfungen

1. **Wetterbeobachtung (6C18)**

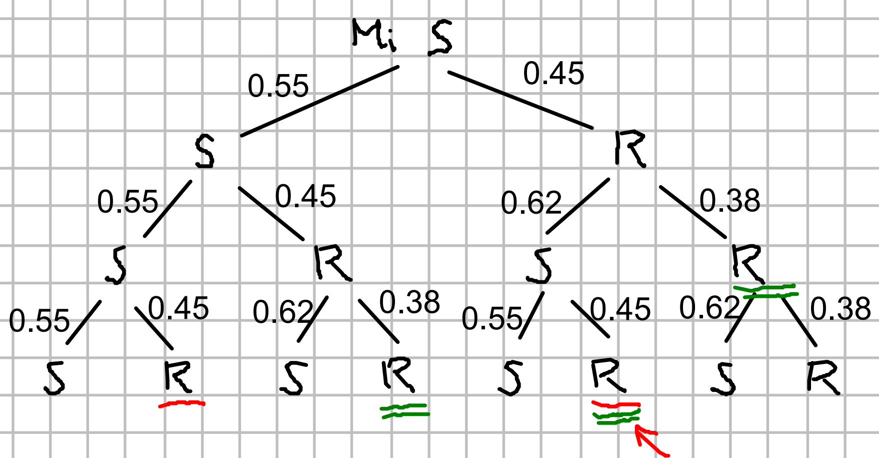
   Es gelte folgende Wetterbeobachtung: Auf einen sonnigen Tag folgt mit 45%-iger Wahrscheinlichkeit ein regnerischer Tag, auf einen regnerischen Tag folgt mit 62%-iger Wahrscheinlichkeit ein sonniger Tag. Am Mittwoch war es sonnig.

   a) Zeichne das Baumdiagramm für die nächsten drei Tage (bis zum Samstag).

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war der Freitag sonnig und der Samstag regnerisch?

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hatte man in der betrachteten Phase mindestens zwei regnerische Tage?

a)



b) $0.55^2 \cdot 0.45 + 0.45 \cdot 0.62 \cdot 0.45 = 0.2617$ Pfade

c) $0.55 \cdot 0.45 \cdot 0.38 + 0.45 \cdot 0.62 \cdot 0.45 + 0.45 \cdot 0.38 = 0.3906$ Pfade

2. **Kugeln ziehen (6F13)**

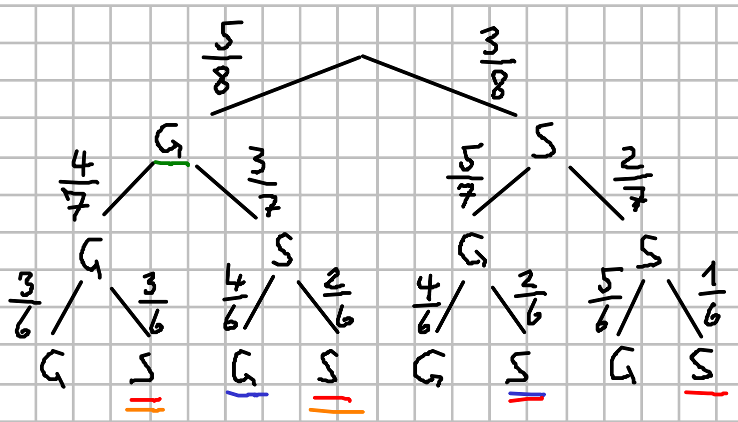
In einem Behälter hat man 5 gelbe und 3 schwarze Kugeln. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.

a) Zeichne den vollständigen Baum zu diesem Versuch mit allen Wahrscheinlichkeiten.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wechselt die Farbe bei jeder Ziehung?

c) Wir betrachten die Ereignisse A: *die erste gezogene Kugel ist gelb* und B: *die dritte gezogene Kugel ist schwarz*. Berechne $P(A)$ und $P(B)$ und begründe dann, ob A und B abhängig oder unabhängig sind.

a)



b) GSG oder SGS $\Rightarrow \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{15}{56}$

c) $p(A) = \frac{5}{8}$

$$p(B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{8}$$

$$p(A \cap B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{15}{56}$$

$$p(A)\cdot p(B) = \frac{15}{64} \neq p(A \cap B) \Rightarrow \text{abhängig}$$

3. **Kombinatorik (6G16)**

Wir betrachten Wörter (Buchstabensequenzen) mit genau 7 Buchstaben. Das Alphabet habe 22 Konsonanten und 8 Vokale.

a) Wie viele Wörter bestehen aus sieben verschiedenen Konsonanten?

b) Wie viele Wörter bestehen aus genau den Buchstaben des Wortes "NENNERN"?

c) Wie viele Wörter beinhalten die Buchstabensequenz "SCHL" (ohne andere Buchstaben dazwischen, d.h. beispielsweise SCHNELL zählt nicht)?

d) Wie viele Wörter beinhalten *genau* drei Vokale?

a) $\frac{22!}{15!} = 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$

b) $\frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!}$

c) $4 \cdot 30^3$

4 Positionen

$\underline{\text{SCHL}}$ XXX

d) $\binom{7}{3} \cdot 8^3 \, 22^4$

4 Konsonanten

3 Vokale

Position der Vokale

4. **Kunstwerk (6B06)**

Ein Kunstwerk bestehe aus 7 (fest montierten) Würfeln unterschiedlicher Grösse. Jeder Würfel wird einfarbig gefärbt. Bestimme jeweils die Anzahl Färbe-Möglichkeiten: (*Die Resultate müssen nicht im Rechner eingetippt werden.*)

a) Man hat 5 Farben. Jeder Würfel erhält eine beliebige dieser 5 Farben.

b) Man hat 12 Farben. Jeder Würfel erhält eine andere Farbe.

c) Jeder Würfel wird entweder schwarz oder weiss gefärbt, aber es sind mindestens 5 Würfel weiss gefärbt.

d) Es stehen nur die Farben rot, gelb und blau zur Auswahl. Jede Farbe muss bei (mindestens) zwei Würfeln vorkommen.

a) 5^7

b) $\frac{12!}{5!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

c) $\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 29$

Entweder 5 oder 6 oder 7 weisse W.

d) $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot 3$

(3 rot, 2 gelb, 2 blau
oder 2 rot, 3 gelb, 2 blau
oder 2 rot, 2 gelb, 3 blau)

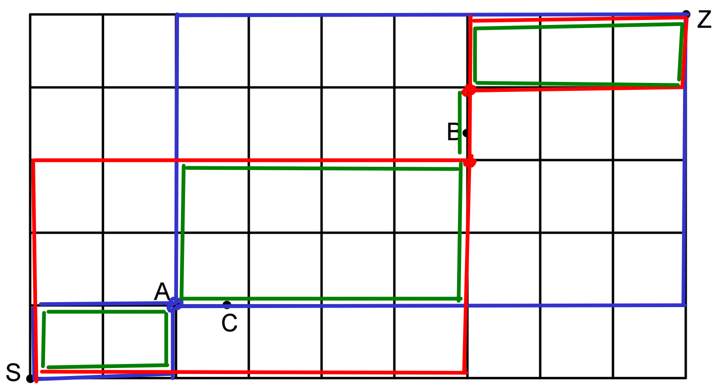
5. **Die Wege des Mr. X (6G16)**

Mr. X geht im gezeichneten, geschlossenen Gitter auf einem der kürzesten Wege von S (Start) nach Z (Ziel). Alle Wege sind gleich wahrscheinlich.
Betrachte die folgenden (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Ereignisse:
A: Mr. X kommt auf seinem Weg beim Punkt A vorbei.
B: Mr. X kommt auf seinem Weg beim Punkt B vorbei.
C: Mr. X kommt auf seinem Weg beim Punkt C vorbei.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

b) Sind A und B abhängig oder unabhängig? Begründe durch Berechnung.

c) Begründe *ohne* Berechnung, weshalb A und C abhängig sind.



a) $P(A) = \dfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{11}{4}}{\binom{14}{5}} = \dfrac{45}{91}$

$P(B) = \dfrac{\binom{9}{3} \cdot 1 \cdot \binom{4}{3}}{\binom{14}{5}} = \dfrac{24}{243}$

b) $P(A \cap B) = \dfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{3}}{\binom{14}{5}} = \dfrac{90}{1001}$

$\neq P(A) \cdot P(B)$, also abhängig

c) Wenn man weiss, dass man bei C vorbeikommt, dann musste man vorher bei A vorbeigegangen sein.

$P(A|C) = 1 \neq P(A)$

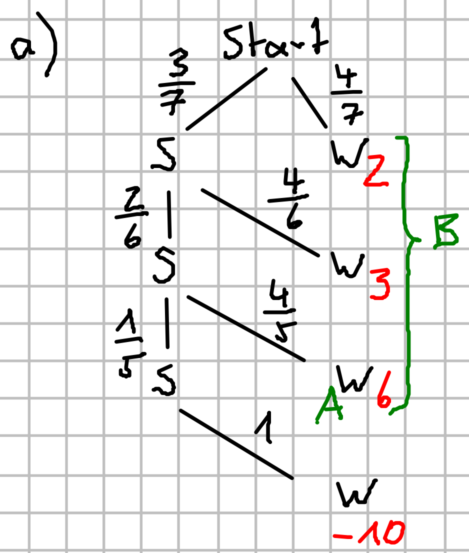
6. **Ein Spiel (6H12)**

In einem Behälter hat man 4 weisse und 3 schwarze Kugeln. Man zieht Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen so lange, bis man eine weisse Kugel erwischt hat (das Spiel ist dann sofort zu Ende). Wenn man eine weisse Kugel in der ersten (zweiten, resp. dritten) Ziehung erhalten hat, so gewinnt man 2 Fr. (3 Fr. resp. 6 Fr.). Wenn man die weisse Kugel erst in der 4. Ziehung erhält, so verliert man 10 Fr.

a) Die Zufallsgrösse X bezeichnet den Spielgewinn. Berechne $E(X)$, $V(X)$ und $\sigma(X)$.

b) Angenommen, wir wissen, dass A bei diesem Spiel nicht verloren hat: Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er den maximalen Gewinn von 6 Fr. erzielt hat?

a)



X	2	3	6	−10
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X) = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$V(X) = 6.069$$

$$\sigma(X) = 2.463$$

b) $$P(A \mid B) = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35}} = \frac{2}{17} = 0.1176$$

7. **Glücksrad (6K16)**
Ein Glücksrad zeigt ♣ mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.35$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man in 12 Drehungen weniger als fünf Zeichen ♣?

b) Das Glücksrad wird 50 Mal gedreht. Welche Anzahl ♣ ist am wahrscheinlichsten?

c) Wie oft muss man das Glücksrad drehen, um mit 99.9%-iger Sicherheit mindestens ein ♣ zu erhalten?

a) $\sum_{x=0}^{4} \binom{12}{x} \cdot 0.35^{x} \cdot 0.65^{12-x} = 0.5835$

b) $n \cdot p = 17.5$, also 17 oder 18

17 : $\binom{50}{17} \cdot 0.35^{17} \, 0.65^{33} = 0.1171$

18 : $\binom{50}{18} \cdot 0.35^{18} \, 0.65^{32} = 0.1156$

$\Rightarrow$ 17 Zeichen

c) $1 - 0.65^{n} = 0.999 \Rightarrow n = 16.03$

$\Rightarrow$ mindestens 17 Drehungen

8. **Soll man besser mit oder ohne Zurücklegen ziehen? (6H12)**

In einem Behälter hat man 8 rote und 12 blaue Kugeln. (Diese Ausgangssituation wird vor jedem Spiel wieder hergestellt.)
Mr. X zieht mit Zurücklegen, Mr. Y zieht ohne Zurücklegen.

a) Im ersten Spiel zieht man 3 Kugeln. Wenn man zwei blaue und eine rote Kugel zieht, gewinnt man einen Preis. Wer hat die grössere Gewinnchance (Mr. X oder Mr. Y)?

b) Im zweiten Spiel zieht man 9 Kugeln. Man gewinnt, wenn man mindestens eine rote, aber (gleichzeitig) mehr blaue als rote Kugeln zieht. Wer hat jetzt die grössere Gewinnchance?

Mr X | Mr Y

a) $\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{12}{20}\right)^2 \left(\frac{8}{20}\right) = 43.2\,\% \quad < \quad \frac{\binom{12}{2}\binom{8}{1}}{\binom{20}{3}} = 46.32\,\%$

b) $\sum_{x=5}^{8} \binom{9}{x} \cdot \left(\frac{12}{20}\right)^x \left(\frac{8}{20}\right)^{9-x} = 72.34\,\% \quad < \quad \sum_{x=5}^{8} \frac{\binom{12}{x}\binom{8}{9-x}}{\binom{20}{9}} = 79.38\,\%$

Die Gewinnchance von Mr Y ist in beiden Spielen grösser.

9. **Drei Spieler (6F13)**

In einem Behälter hat man 6 Kugeln, welche mit 0, 0, 0, 2, 5, 10 beschriftet sind. Man zieht Kugeln *mit einem Griff* und erhält das Produkt der gezogenen Zahlen als Gewinn.
Mr. X zieht eine Kugel (sein Gewinn sei X), Mr. Y zieht zwei Kugeln (sein Gewinn sei Y) und Mr. Z zieht drei Kugeln (sein Gewinn sei Z).

a) Berechne $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$, $E(Z)$ und $V(Z)$. Welcher von den drei Spielern erzielt folglich den grössten durchschnittlichen Gewinn?

b) Wieso spielt eigentlich nicht noch ein Mr. W mit, der vier Kugeln zieht?

a)

X	0	2	5	10
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = \frac{17}{6} = 2.83$

$V(X) = 13.472$

Y	0	10	20	50
p	$\frac{12}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(Y) = \frac{16}{3} = 5.33$

$V(Y) = 171.56$

total $\binom{6}{2} = 15$ Ziehungen

je 1 Möglichkeit $2 \cdot 5$, $2 \cdot 10$, $5 \cdot 10$, sonst 0

Z	0	100
p	$\frac{19}{20}$	$\frac{1}{20}$

$E(Z) = 5$

$V(Z) = 475$

total $\binom{6}{3} = 20$ Ziehungen

nur 1 Möglichkeit $2 \cdot 5 \cdot 10$, sonst 0.

$\Rightarrow$ Mr Y hat höchsten Erwartungswert

b) Mr W zieht sicher eine Null $E(W) = 0$

10. **Aprilscherze (6G09)**

(2009 fand die Gesamtrepetitionsprüfung Stochastik am 1. April statt.)
In Stochasien werden Agenturmeldungen per Radio verbreitet. Am 1. April sind erfahrungsgemäss 15% der Meldungen Aprilscherze.

a) Herr A hört in den Nachrichten 24 Meldungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es darunter mehr als 5 Aprilscherze?

b) Frau B hört den ganzen Tag Radio. Dabei erfährt sie 285 (verschiedene) Meldungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie zwischen 35 und 45 Aprilscherze gehört?

c) Am 2. April stellt sich heraus, dass von den 285 Radiomeldungen 52 Aprilscherze waren. Das lässt uns am Erfahrungswert von 15% zweifeln. Ist unser Zweifel berechtigt? (α=5%)

a) $\sum_{x=6}^{24} \binom{24}{x} \cdot 0.15^x \, 0.85^{24-x} = 0.1394$

b) Normalverteilung

$n = 285$, $\mu = 42.75$ $\sigma = 6.028$

$\Phi\left(\frac{45-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{35-\mu}{\sigma}\right) = 0.5462$

Binomialverteilung

$\sum_{x=35}^{45} \binom{285}{x} 0.15^x \, 0.85^{285-x} = 0.5987$

c) $H_0: p = 0.15$ $H_1: p > 0.15$

Normalverteilt: $1 - \Phi\left(\frac{52-\mu}{\sigma}\right) = 0.062$

Binomialverteilt: $\sum_{x=52}^{285} \binom{285}{x} 0.15^x \, 0.85^{285-x}$

$= 0.076$

So oder so: H_0 beibehalten

Die Zweifel sind unberechtigt.

11. **Jahrmarkt (6B11)**

Auf einem Jahrmarkt steht ein Glücksrad, welches 66% Gewinnchance verspricht (so jedenfalls lauten die Angaben des Veranstalters).

a) Im Verlaufe des Jahrmarkts wird das Glücksrad 1437 Mal gedreht. Dabei wurden 920 Gewinne erzielt. Werte diese Beobachtung mit einem (ausführ lich formulierten) Hypothesentest aus. (α=5%)

b) Wie viele Drehungen mit dem Glücksrad muss man (mindestens) durchführen, wenn man mit (mindestens) 75%-iger Sicherheit (mindestens) 543 Gewinne erzielen will?

a) $H_0 : p = 0.66$ $\quad n = 1437$

$H_1 : p < 0.66$ $\quad \mu = 948.42$

$\sigma = 17.96$

$x = 920$

$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = -1.582$

$\Phi(z) = 0.056 > \alpha \Rightarrow H_0$ beibehalten

Die Angabe $p = 0.66$ ist in Ordnung

b) n gesucht ("overbooking" - Problem)

$\mu = 0.66\, n \quad \sigma = \sqrt{0.66 \cdot 0.34 \cdot n}$

$\Phi(z) = 0.25 \Rightarrow z = -0.6745$

$x = 543$

Alles in $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ einsetzen

$\Rightarrow n = 836.7$, also ≥ 837 Drehungen

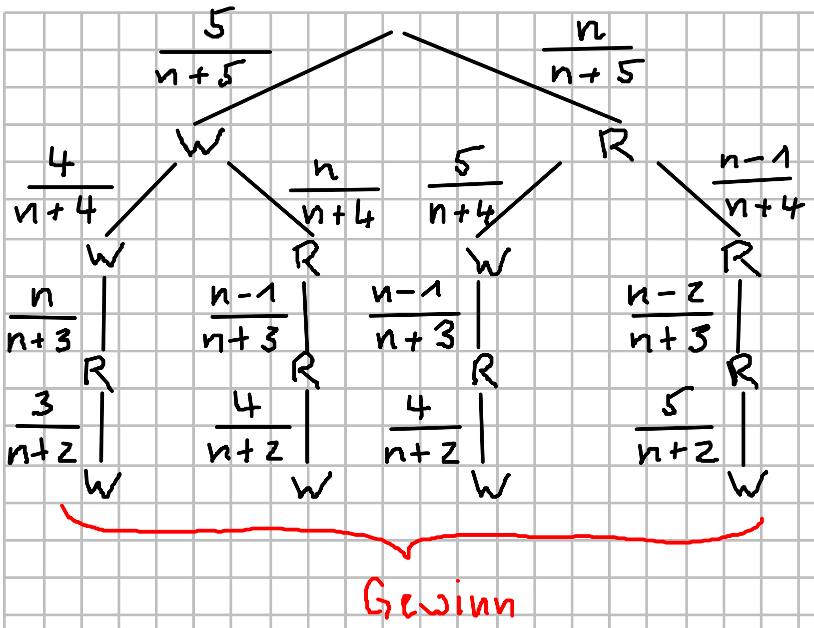
12. **Maximaler Erwartungswert (6C18)**

In einem Behälter hat man 5 weisse und einige rote Kugeln, wobei der Spieler wählen darf, wie viele rote Kugeln er in den Behälter legen will.

Man zieht vier Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Wenn dabei die dritte Kugel rot und die vierte weiss waren, dann gewinnt man 9 Fr., andernfalls gewinnt man nichts. Die Zufallsgrösse X bezeichnet den Spielgewinn. Wie gross kann $E(X)$ maximal werden, und wie viele rote Kugeln muss der Spieler dazu in den Behälter legen?

5 weisse

n rote



$$P(\text{Gewinn}) = \frac{5n}{(n+4)(n+5)} = p$$

X	9	0
	p	$1-p$

$$E(X) = 9 \cdot p = \frac{45n}{(n+4)(n+5)}$$

$$E'(X) = 0$$

$$\Rightarrow n = 4.47$$

$$n = 4 \Rightarrow E(X) = \frac{5}{2}$$

$$n = 5 \Rightarrow E(X) = \frac{5}{2}$$

Also 4 oder 5 Kugeln