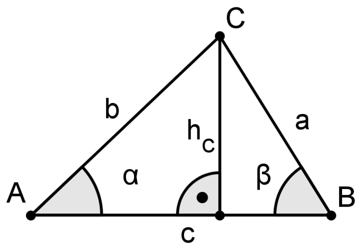
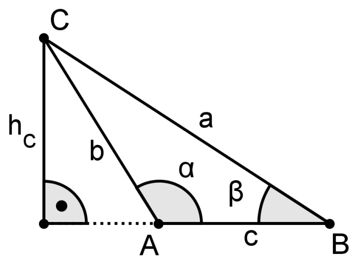
4. Berechnungen am beliebigen Dreieck

4.1. Der Sinus-Satz

1. **Beispiel**
   Von einem Dreieck kennt man die Seiten $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und den Winkel $\alpha = 40°$ Berechne den Winkel β.

2. **Herleitung des Sinus-Satzes**
   Wir lösen diese Aufgabe allgemein. Betrachten vorerst das Dreieck in der Figur links.





3. **Überlegungsaufgabe**
   Stimmt der Sinus-Satz auch, wenn das Dreieck stumpfwinklig ist?

4. **Bemerkung**
   Wir hätten natürlich auch mit anderen Winkeln starten können, indem beispielsweise α und γ vorgegeben sind. Dann ist $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

5. **Satz**

6. **Musterbeispiele**

a) Jetzt kann man das Einstiegsbeispiel lösen: Von einem Dreieck kennt man die Seiten $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und den Winkel $\alpha = 40°$ Berechne den Winkel β.

b) Von einem Dreieck kennt man $a = 5.43\,\text{cm}$, $\alpha = 44°$ und $\gamma = 67°$. Berechne c.

c) Von einem Dreieck kennt man $a = 5.43\,\text{cm}$, $c = 8.31\,\text{cm}$ und $\gamma = 67°$. Berechne α.

Übung

Von einem Dreieck kennt man alle Winkel: $45°, 55°$ und $80°$. Weiter kennt man die längste Seite: $8\,\text{cm}$.
Wie lang sind die anderen Seiten?

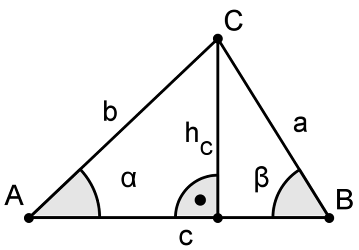
4.2. Der Cosinus-Satz

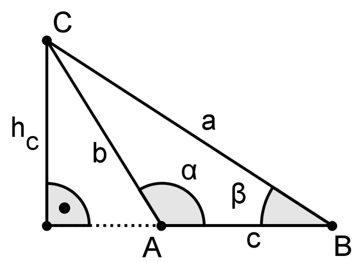
1. **Beispiel**

   Von einem Dreieck kennt man die Seiten $c = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und den Winkel $\alpha = 70°$. Berechne die Seite a.

2. **Herleitung, erster Teil**

   Offensichtlich ist der Sinus-Satz nicht verwendbar.





3. **Herleitung, zweiter Teil**

   Was passiert, wenn $\alpha > 90°$?

Auch für den Cosinus-Satz kann man mit einem anderen Winkel starten.

4. **Satz**

   ....

   ....

   ....

5. **Bemerkung**
   Man überlege sich, was der Cosinus-Satz besagt, wenn $\gamma = 90°$ ist.

   ....

6. **Zweite Form des Cosinus-Satzes**
   Die Gleichungen aus dem Cosinus-Satz kann man nach $\cos(\alpha)$ und entsprechend mit den andern Winkel auflösen.

7. **Musterbeispiele**
   a) Jetzt ist das Eingangsbeispiel lösbar: Von einem Dreieck kennt man die Seiten $c = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und den Winkel $\alpha = 70°$. Berechne die Seite a.
   b) Von einem Dreieck kennt man $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$. Berechne α.

Übung
Man kennt $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $\gamma = 108°$. Berechne c.

4.3. Grundaufgaben

1. **Bemerkung I**

   Von einem Dreieck sind drei sogenannte Aussenstück (Seiten oder Winkel) gegeben. Dann sind die anderen drei berechenbar. Es sind einige Fälle zu unterscheiden:

   ....

   ....

2. **Bemerkung II**

   Wann benötigt man für die Berechnungen den Sinus-Satz, wann den Cosinus-Satz?

   ....

   ....

   ....

3. **Grundaufgabe A**

   Gegeben sind alle Seiten eines Dreiecks.

   Lösungsstrategie: ....

   ....

4. **Beispiele**

   a) $a = 3\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$.

   b) $a = 3\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$.

5. **Grundaufgabe B**
Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

Lösungsstrategien: ....

....

....

....

....

6. **Beispiel**
$a = 1\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $\gamma = 60°$.

7. **Bemerkung**
Wann muss man bei Berechnungen mit Sinus-Satz oder Cosinus-Satz aufpassen?

....

....

....

....

....

....

8. **Grundaufgaben C und D**
Gegeben sind eine Seite und zwei Winkel.

Lösungsstrategie: ....

....

9. **Beispiel**
$c = 2\,\text{cm}$, $\alpha = 40°$, $\beta = 65°$.

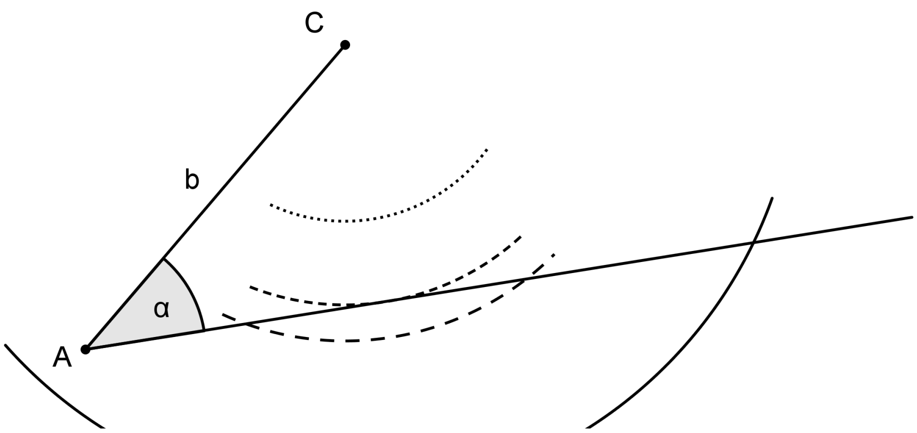
10. **Grundaufgabe E**
Gegeben sind zwei Seiten und ein Winkel, aber nicht der eingeschlossene.

Lösungsstrategie: ....

....

....

Wir betrachten nochmals die Konstruktion.
Gegeben seien die Seite b, der Winkel α und die Seite a.



11. **Beispiele**
    a) $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 40°$.
    b) $a = 7\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$, $\alpha = 38°$.
    c) $a = 4\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 30°$.
    d) $a = 5\,\text{cm}$, $b = 9\,\text{cm}$, $\alpha = 36°$.

Übung

a) $a = 34.5\,\text{cm}$, $\alpha = 55.5°$, $\beta = 66.6°$.

b) $a = 4\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$.

c) $a = 8.76\,\text{cm}$, $c = 5.43\,\text{cm}$, $\beta = 66.6°$.

4.4. Anwendungen

1. **Drachenviereck**

   Von einem Drachen kennt man alle Seiten: 7 cm, 7 cm, 12 cm, 12 cm und eine (welche?!) Diagonale 15 cm.
   Berechne alle Innenwinkel.

2. **Dreieck**

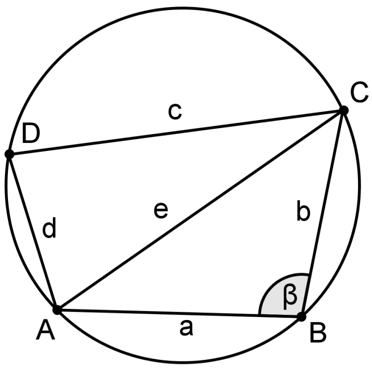
   Von einem Dreieck kennt man die Seite $c = 9\,\text{cm}$, die Höhe $h_b = 5\,\text{cm}$ sowie den Winkel $\gamma = 70°$.
   Berechne die Fläche dieses Dreiecks.

3. **Zwei Kreise**

Die Zentren zweier Kreise haben einen Abstand von 12 cm. Die zur gemeinsamen Sehne gehörenden Zentriwinkel betragen 72° resp. 130°.
Berechne die Kreisradien.

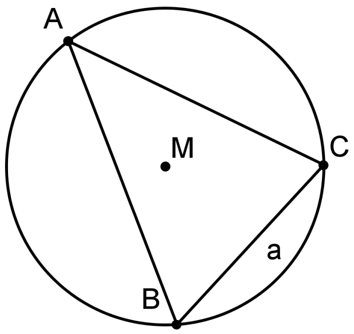
Übung

Von einem Sehnenviereck (siehe die Figur) kennt man $a = 5$, $c = 4.3$, $e = 5.4$ und $\beta = 94°$. Bestimme die fehlenden Seiten und Winkel.



4. **Umkreis**

Welche Bedeutung hat das konstante Verhältnis $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$?



5. **Beispiel**

Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 6\,\text{cm}$, den Winkel $\gamma = 70°$ und den Umkreisradius $r = 4\,\text{cm}$.
Berechne die anderen Seiten dieses Dreiecks.

Übung

(Fortsetzung der Übung auf der vorhergehenden Seite.)
Berechne den Umkreisradius des Sehnenvierecks.