Gesamtrepetition Vektorgeometrie

Aufgaben aus früheren Prüfungen

1. **Dreieck**

   Vom Dreieck $A\,(\,1\,|\,-1\,|\,1\,)$ $B\,(\,2\,|\,0\,|\,-4\,)$ $C\,(\,5\,|\,3\,|\,8\,)$ berechne man

   a) den Winkel α,

   b) die Fläche F und

   c) die (Länge der) Höhe h_a

2. **Spiegelung**

Ein vom Punkt $P\ (0\,|-2\,|\,8)$ ausgehender Lichtstrahl wird zunächst an der Ebene $4x - 3y - z - 24 = 0$, dann an der Ebene $x + 3z - 6 = 0$ reflektiert und geht schliesslich durch den Punkt $Q\ (-2\,|\,4\,|\,6)$.

a) Bestimme die Koordinaten der beiden Reflexionspunkte.

b) Berechne die Länge des Lichtstrahls (von P über die beiden Reflexionspunkte bis nach Q gerechnet.)

3. **Würfel**

Von einem Würfel kennt man die Ecken $A\ (2\,|-3\,|\,1)$ und $B\ (4\,|\,0\,|\,7)$. Von der Ebene der Würfelgrundfläche $ABCD$ kennt man noch den Punkt $P\ (0\,|\,0\,|-1)$. Bestimme die Koordinaten aller Würfeleckpunkte.

4. **Gerade und Kugel**
Gegeben ist die Gerade g: $(\,5\,|\,2\,|\,10\,)\ \ (\,7\,|\,-2\,|\,10\,)$
und die Kugel $k: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 12z - 20 = 0$.

a) In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneiden sich g und k?

b) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene in einem der beiden Schnittpunkte.

5. **Inkugel**

Gegeben sind die Eckpunkte $A\ (3\,|\,6\,|\,-2)$, $B\ (7\,|\,10\,|\,0)$ und $C\ (9\,|\,6\,|\,4)$ der Bodenfläche eines Würfels.

a) Weise nach, dass die Daten stimmen, d.h. dass A, B und C wirklich Eckpunkte eines Würfels sind und bestimme die Koordinaten von D, E und F.

b) Bestimme die Gleichung der Inkugel. (Das ist die grösste Kugel, die in den Würfel hineinpasst, wenn man den Würfel als Schachtel denkt.)

6. **Zwei Kugeln**

Gegeben sind die Kugeln $k_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4z - 36 = 0$
und $k_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + z + 3 = 0$.

a) Bestimme die Mittelpunkte und Radien der beiden Kugeln.

b) Weise nach, dass sich die Kugeln berühren und bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene (im Berührpunkt).

7. **Drei Ebenen**

Gegeben sind drei Ebenen: $\varepsilon_1 : 3x + y - 2z + 5 = 0$, $\varepsilon_2 : x - y - 6z + 31 = 0$, $\varepsilon_3 . 2x + 3y + c \cdot z + d = 0$.

a) Bestimme die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen ε_1 und ε_2.

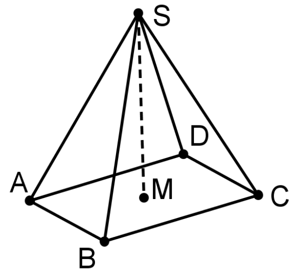
b) Die Ebene ε_3 soll auch durch dieselbe Schnittgerade gehen. Bestimme c und d.

8. **Gleichseitiges Dreieck**

Von einem gleichseitigen Dreieck ABC kennt man $A\,(\,0\,|\,7\,|\,9\,)$ und weiss, dass B und C auf der Geraden g: $(\,4\,|\,5\,|\,-13\,)$ $(\,5\,|\,9\,|\,-14\,)$ liegen.
Bestimme die Koordinaten von B und C.

9. **Pyramide**

Von einer geraden quadratischen Pyramide (siehe die Figur: $ABCD$ ist ein Quadrat) kennt man
die Spitze $S\ (6\,|\,13\,|\,9)$,
das Zentrum der Bodenfläche $M\ (0\,|\,1\,|\,-3)$
und den Punkt $P\ (2\,|\,3\,|\,3)$ auf der Kante AS.
Bestimme die Koordinaten von A, B, C und D.
Hinweis: Bestimme die Gleichung der Ebene $ABCD$.



10. **Reflexion**

Gegeben sind die Punkte $A\ (\,4\,|\,-10\,|\,8\,)$ und $B\ (\,5\,|\,-6\,|\,7\,)$
sowie die Kugel k: $M\ (\,6\,|\,10\,|\,0\,)$, $r = 6$.
Ein von A ausgehender Lichtstrahl geht zunächst durch B und trifft dann auf die Kugel, wo er reflektiert wird.
Bestimme den reflektierten Strahl (Parametergleichung).
Hinweis: Eine Reflexion an der Kugel ist gleichbedeutend mit der Reflexion an der Tangentialebene im betreffenden Kugelpunkt.

11. **Berührende Kugeln**

Von einer Kugel k_1 kennt man das Zentrum $M_1\ (2\,|\,3\,|\,7)$ und den Radius $r_1 = 6$. Weiter ist die Gerade g: $(9\,|\,6\,|\,4)$ $(10\,|\,6\,|\,3)$ gegeben.
Gesucht ist eine Kugel k_2 mit Radius $r_2 = 1$, welche das Zentrum M_2 auf g hat und welche k_1 berührt.

a) Bestimme *eine* Lösung für M_2 und dazu den Berührpunkt von k_1 mit k_2.

b) Wie viele Lösungen solcher Kugeln k_2 gibt es? Begründe!

12. **Zwei Ebenen und eine Kugel**

Gegeben sind zwei Ebenen: $\varepsilon_1 : 2x - y + 2z + 3 = 0$ und $\varepsilon_2 : 2x - y + 2z - 33 = 0$ sowie die Gerade g: $(5|1|6)$ $(4|0|8)$.

a) Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen.

b) Gesucht ist die Kugel k, welche ihr Zentrum auf g hat und beide Ebenen berührt. Bestimme die Kugelgleichung sowie die Koordinaten der beiden Berührpunkte.