

Gesamtrepitition Vektorgeometrie

Aufgaben aus früheren Prüfungen

1. Dreieck

Vom Dreieck $A(1|-1|1)$ $B(2|0|-4)$ $C(5|3|8)$ berechne man

- den Winkel α ,
- die Fläche F und
- die (Länge der) Höhe h_a

$$a) \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 125.26^\circ}}$$

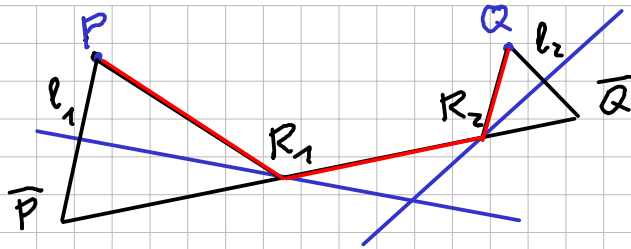
$$b) \quad F = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \underline{\underline{\frac{27}{2}\sqrt{2}}}$$

$$c) \quad F = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow \frac{27}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} \|\vec{BC}\| \cdot h_a$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{h_a = 3}}$$

2. Spiegelung

Ein vom Punkt $P(0|-2|8)$ ausgehender Lichtstrahl wird zunächst an der Ebene $4x - 3y - z - 24 = 0$, dann an der Ebene $x + 3z - 6 = 0$ reflektiert und geht schliesslich durch den Punkt $Q(-2|4|6)$.

- Bestimme die Koordinaten der beiden Reflexionspunkte.
- Berechne die Länge des Lichtstrahls (von P über die beiden Reflexionspunkte bis nach Q gerechnet.)



$$a) \quad P \text{ an } \varepsilon_1 \text{ spiegeln} \quad l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$l_1 \cap \varepsilon_1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow t = 2 \text{ für } \bar{P}(8|-8|6)$$

$$Q \text{ an } \varepsilon_2 \text{ spiegeln} \quad l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \cap \varepsilon_2 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow t = -2 \text{ für } \bar{Q}(-4|4|0)$$

$$\bar{P}\bar{Q}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}\bar{Q} \cap \varepsilon_1 \Rightarrow \underline{\underline{R_1(4|-4|4)}}$$

$$\bar{P}\bar{Q} \cap \varepsilon_2 \Rightarrow \underline{\underline{R_2(0|0|2)}}$$

$$b) \quad \text{Länge} = \|\vec{\bar{P}\bar{Q}}\| = \underline{\underline{18}}$$

3. Würfel

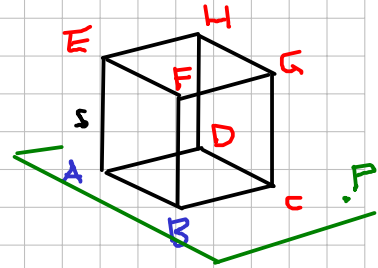
Von einem Würfel kennt man die Ecken $A(2|-3|1)$ und $B(4|0|7)$. Von der Ebene der Würfelgrundfläche $ABCD$ kennt man noch den Punkt $P(0|0|-1)$. Bestimme die Koordinaten aller Würfeleckenpunkte.

$$s = \|\vec{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = 7$$

$$\vec{AB} \times \vec{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \vec{AE} = \vec{BF} = \dots = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 21 \\ -42 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{AD} = \vec{BC} = \vec{FG} = \vec{EH}$$



$$C(7|-6|9)$$

$$D(5|-9|3)$$

$$E(-4|-5|4)$$

$$F(-2|-2|10)$$

$$G(1|-8|12)$$

$$H(-1|-11|6)$$

(Es sind 4 Würfel
möglich)

4. Gerade und Kugel

Gegeben ist die Gerade $g: (5|2|10) (7|-2|10)$
und die Kugel $k: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 12z - 20 = 0$.

- a) In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneiden sich g und k ?
b) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene in einem der beiden Schnittpunkte.

$$a) \quad k: (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2 = 81$$
$$M(3|-4|6), \quad r=9$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g \cap k: S_1(10|-8|10) \quad S_2(4|4|10)$$

$$\vec{MS}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \cos \alpha = \frac{\vec{MS}_1 \cdot \vec{v}_g}{\|\vec{MS}_1\| \cdot \|\vec{v}_g\|} \Rightarrow \alpha = 41.21^\circ$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta = 48.19^\circ}}$$

$$b) \quad \vec{MS}_1 = \vec{n}_E \Rightarrow \underline{\underline{7x - 4y + 4z - 142 = 0}}$$

$$\text{In } S_2: \underline{\underline{x + 8y + 4z - 76 = 0}}$$

5. Inkugel

Gegeben sind die Eckpunkte $A (3|6|-2)$, $B (7|10|0)$ und $C (9|6|4)$ der Bodenfläche eines Würfels.

- Weise nach, dass die Daten stimmen, d.h. dass A , B und C wirklich Eckpunkte eines Würfels sind und bestimme die Koordinaten von D , E und F .
- Bestimme die Gleichung der Inkugel. (Das ist die grösste Kugel, die in den Würfel hineinpasst, wenn man den Würfel als Schachtel denkt.)

$$a) \quad \|\vec{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 6, \quad \|\vec{BC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 6$$

$$\text{und } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

$$\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow \underline{\underline{D(5|2|2)}}$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AE} = \vec{BF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E(-1|8|2)$$

$$E(7|4|-6)$$

$$F(3|12|4)$$

oder

$$F(11|8|-4)$$

$$b) \quad M \text{ ist Mitte von } CE, \quad r = 3 = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|$$

$$M(4|7|3)$$

oder

$$M(8|5|-1)$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 = 9$$

oder

$$(x-8)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 9$$

6. Zwei Kugeln

Gegeben sind die Kugeln $k_1: x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4z - 36 = 0$
 und $k_2: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + z + 3 = 0$.

- Bestimme die Mittelpunkte und Radien der beiden Kugeln.
- Weise nach, dass sich die Kugeln berühren und bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene (im Berührungspunkt).

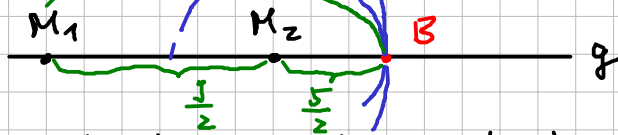
$$a) \quad k_1: x^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 49$$

$$k_2: (x-3)^2 + y^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$$

$$\underline{\underline{M_1(0|-3|-2) \quad r_1=7, \quad M_2(3|0|-\frac{1}{2}), \quad r_2=\frac{5}{2}}}$$

$$b) \quad \|\vec{M_1 M_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\| = \frac{9}{2} = \underline{\underline{r_1 - r_2}}$$

(Berührung von innen)



$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1(t=0), \quad M_2(t=1) \Rightarrow B(t=\frac{14}{9})$$

$$\underline{\underline{B\left(\frac{14}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{1}{3}\right)}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon: 2x + 2y + z - 13 = 0}}$$

7. Drei Ebenen

Gegeben sind drei Ebenen: $\varepsilon_1 : 3x + y - 2z + 5 = 0$, $\varepsilon_2 : x - y - 6z + 31 = 0$,
 $\varepsilon_3 : 2x + 3y + c \cdot z + d = 0$.

- Bestimme die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 .
- Die Ebene ε_3 soll auch durch dieselbe Schnittgerade gehen. Bestimme c und d .

$$a) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{r}_s$$

$$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap z=0 \Rightarrow x = -9, y = 22$$

$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 64.306^\circ}}$$

$$b) \vec{n}_3 \cdot \vec{r}_s = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c = -13}}$$

$$2x + 3y - 13z + d = 0 \text{ durch } (-9|22|0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d = -48}}$$

8. Gleichseitiges Dreieck

Von einem gleichseitigen Dreieck ABC kennt man $A(0|7|9)$ und weiss, dass B und C auf der Geraden $g: (4|5|-13) + t(1|4|-1)$ liegen.
Bestimme die Koordinaten von B und C .

M ist Lotfusspunkt von A
auf g

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalebene } x + 4y - z - 19 = 0$$

$$g \cap \varepsilon \Rightarrow M(3|1|-12)$$

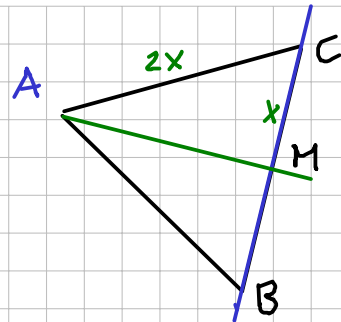
$$\|\overrightarrow{AM}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -21 \end{pmatrix} \right\| = 9\sqrt{6} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 9\sqrt{2}$$

\vec{r}_g auf Länge x bringen und in M anhängen

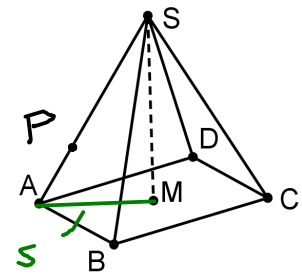
$$\|\vec{r}_g\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = 3 \cdot \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B(6|13|-15), C(0|-11|-9)}}$$



9. Pyramide

Von einer geraden quadratischen Pyramide (siehe die Figur: $ABCD$ ist ein Quadrat) kennt man die Spitze $S(6|13|9)$, das Zentrum der Bodenfläche $M(0|1|-3)$ und den Punkt $P(2|3|3)$ auf der Kante AS . Bestimme die Koordinaten von A, B, C und D .
Hinweis: Bestimme die Gleichung der Ebene $ABCD$.



$$a) \quad \vec{MS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: x + 2y + 2z + 4 = 0$$

$$b) \quad SP: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \cap E$$

$$\Rightarrow \underline{A(0|-2|0)}$$

$$c) \quad \vec{AM} = \vec{MC} \Rightarrow \underline{C(0|4|-6)}$$

$$s = \|\vec{AM}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2}$$

$$d) \quad \vec{n}_E \times \vec{AM} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ hat L\u00e4nge } 9\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{MB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{MD}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{B(-4|2|-2)} \\ \underline{D(4|0|-4)} \end{array} \right\} \text{ (vertauschbar)}$$

10. Reflexion

Gegeben sind die Punkte $A(4 | -10 | 8)$ und $B(5 | -6 | 7)$
sowie die Kugel $k: M(6 | 10 | 0), r = 6$.

Ein von A ausgehender Lichtstrahl geht zunächst durch B und trifft dann auf die Kugel, wo er reflektiert wird.

Bestimme den reflektierten Strahl (Parametergleichung).

Hinweis: Eine Reflexion an der Kugel ist gleichbedeutend mit der Reflexion an der Tangentialebene im betreffenden Kugelpunkt.

$k: (x-6)^2 + (y-10)^2 + z^2 = 36$

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g \cap k \Rightarrow \underline{\underline{R(8 | 6 | 4)}}$ mit $t = 4$
 $(R_2 \text{ hat } t = 6)$

$\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}_\varepsilon \Rightarrow \varepsilon: x - 2y + 2z - 4 = 0$

$A \text{ an } \varepsilon \text{ spiegeln: } l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$l \cap \varepsilon \Rightarrow t = -4 \Rightarrow t = -8 \text{ für } \bar{A}(-4 | 6 | -8)$

$\overrightarrow{\bar{A}R} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

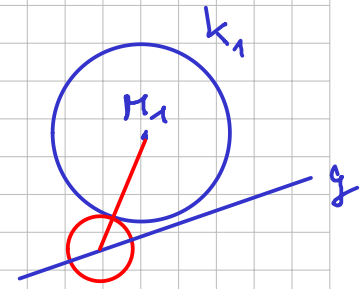
11. Berührende Kugeln

Von einer Kugel k_1 kennt man das Zentrum $M_1 (2|3|7)$ und den Radius $r_1 = 6$. Weiter ist die Gerade $g: (9|6|4) (10|6|3)$ gegeben.

Gesucht ist eine Kugel k_2 mit Radius $r_2 = 1$, welche das Zentrum M_2 auf g hat und welche k_1 berührt.

- Bestimme *eine* Lösung für M_2 und dazu den Berührungspunkt von k_1 mit k_2 .
- Wie viele Lösungen solcher Kugeln k_2 gibt es? Begründe!

a) $r_1 + r_2 = 7$, d.h. suche Punkt auf g mit Abstand 7 von M_1 , oder lege eine Kugel k_3 mit Zentrum M_1 , $r = 7$ und $k_3 \cap g$.



$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+t \\ 6 \\ 4-t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 9+t \\ 6 \\ 4-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = 7 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 & M_2(8|6|5) \\ t_2 = -9 & M_2(0|6|13) \end{cases}$$

oder

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 49 \cap g \quad \uparrow$$

b) 2 Lösungen von aussen, 2 von innen

$$r_1 - r_2 = 5$$

$$\text{z.B. } (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} t_3 = -3 \\ t_4 = -7 \end{cases}$$

4 Lösungen

12. Zwei Ebenen und eine Kugel

Gegeben sind zwei Ebenen: $\varepsilon_1 : 2x - y + 2z + 3 = 0$ und $\varepsilon_2 : 2x - y + 2z - 33 = 0$ sowie die Gerade $g : (5|1|6) \ (4|0|8)$.

- Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen.
- Gesucht ist die Kugel k , welche ihr Zentrum auf g hat und beide Ebenen berührt. Bestimme die Kugelgleichung sowie die Koordinaten der beiden Berührungspunkte.

a) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}_2 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

b) Mittelparallelenebene

$P_1(0|3|0), P_2(0|-33|0)$

$\Rightarrow P_3(0|-15|0)$

$\Rightarrow \varepsilon_3 : 2x - y + 2z - 15 = 0 \cap g$

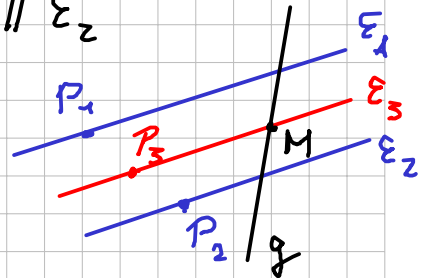
$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M(7|3|2)}}$

Lot von M auf ε_1 und ε_2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\ell \cap \varepsilon_1 \Rightarrow \underline{\underline{B_1(3|5|-2)}}$

$\ell \cap \varepsilon_2 \Rightarrow \underline{\underline{B_2(11|1|6)}}$, $r = \|\vec{MB_1}\| = 6$

$\underline{\underline{k : (x-7)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36}}$



3. Würfel

Von einem Würfel kennt man die Ecken $A(2|-3|1)$ und $B(4|0|7)$. Von der Ebene der Würfelgrundfläche $ABCD$ kennt man noch den Punkt $P(0|0|-1)$. Bestimme die Koordinaten aller Würfeleckpunkte.

$c:=b+ad$	$[7 \ -6 \ 9]$
$d:=a+ad$	$[5 \ -9 \ 3]$
$e:=a-ae$	$[-4 \ -5 \ 4]$
$f:=b-ae$	$[-2 \ -2 \ 10]$
$g:=c-ae$	$[1 \ -8 \ 12]$
$h:=d-ae$	$[-1 \ -11 \ 6]$
$c:=b-ad$	$[1 \ 6 \ 5]$
$d:=a-ad$	$[-1 \ 3 \ -1]$
$e:=a-ae$	$[-4 \ -5 \ 4]$
$f:=b-ae$	$[-2 \ -2 \ 10]$
$g:=c-ae$	$[-5 \ 4 \ 8]$
$h:=d-ae$	$[-7 \ 1 \ 2]$

$c:=b+ad$	$[7 \ -6 \ 9]$
$d:=a+ad$	$[5 \ -9 \ 3]$
$e:=a+ae$	$[8 \ -1 \ -2]$
$f:=b+ae$	$[10 \ 2 \ 4]$
$g:=c+ae$	$[13 \ -4 \ 6]$
$h:=d+ae$	$[11 \ -7 \ 0]$
$c:=b-ad$	$[1 \ 6 \ 5]$
$d:=a-ad$	$[-1 \ 3 \ -1]$
$e:=a+ae$	$[8 \ -1 \ -2]$
$f:=b+ae$	$[10 \ 2 \ 4]$
$g:=c+ae$	$[7 \ 8 \ 2]$
$h:=d+ae$	$[5 \ 5 \ -4]$