Vektorgeometrie

1. Vektoren

1.1. Freie Vektoren

1. **Definition**

   Ein Vektor ist ....

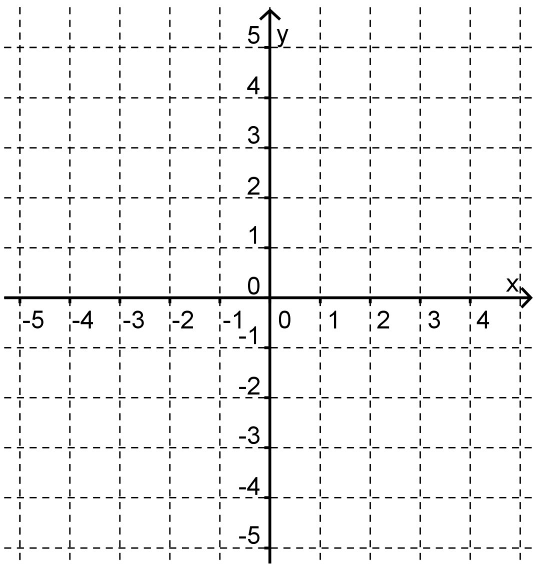
   ....

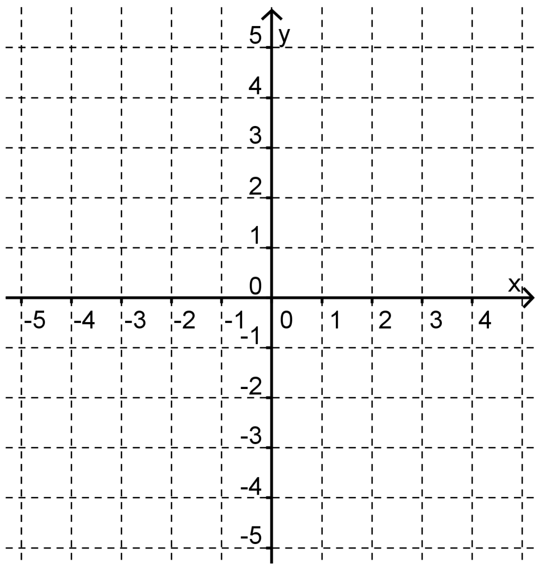
   Zwei Vektoren sind gleich, ...

   ....

2. **Das ebene Koordinatensystem**

   Wir legen den Koordinatenursprung fest, ferner zwei zueinander senkrechte Achsen und darauf je einen Einheitsvektor.
   Durch die Koordinatenachsen wird die Ebene in vier Quadranten unterteilt.





3. **Freie Vektoren im Koordinatensystem**

   Der Anfangspunkt eines freien Vektors ist beliebig.

   $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bedeutet ....

   ....

   a_1 heisst ....

   a_2 heisst ....

   Diese Darstellung heisst ....

4. **Vektoren einzeichnen**

   Zeichne die folgenden Vektoren ins Koordinatensystem ein.

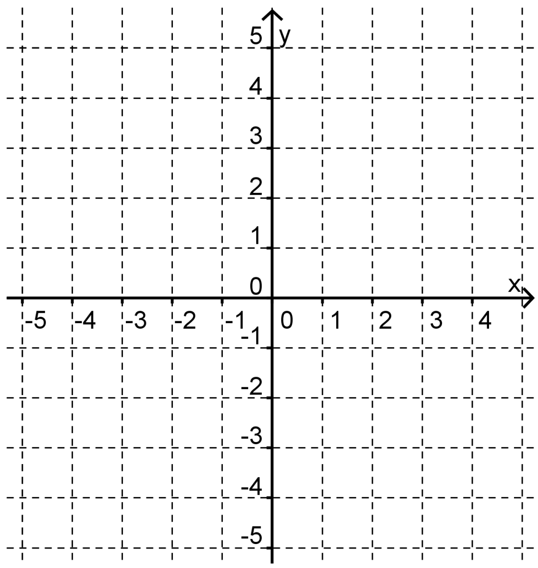
   $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

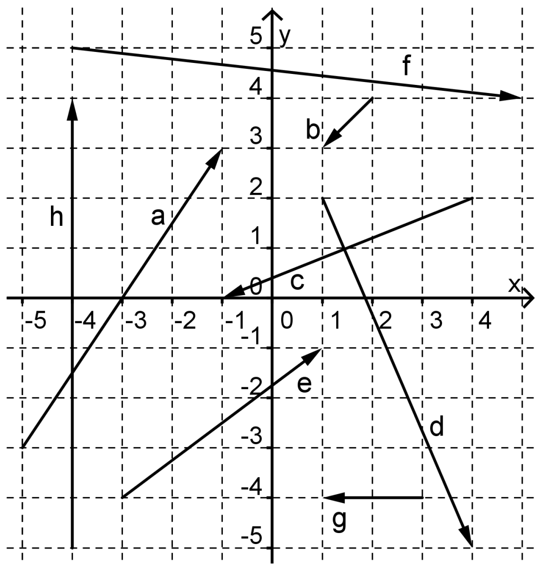
   $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

   $\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$



5. **Komponenten ablesen**

   Bestimme die Komponentendarstellung der eingezeichneten Vektoren. Hinweis: Alle Komponenten sind ganzzahlig.



Orientierung

a) Was kann man über die Komponenten eines Vektors sagen, der nach links oben zeigt (bei üblicher Anordnung der Achsen)?

b) Ein Vektor hat seinen Anfangspunkt im II. Quadranten, seinen Endpunkt im IV. Quadranten. Was kann man über die Komponenten dieses Vektors sagen?

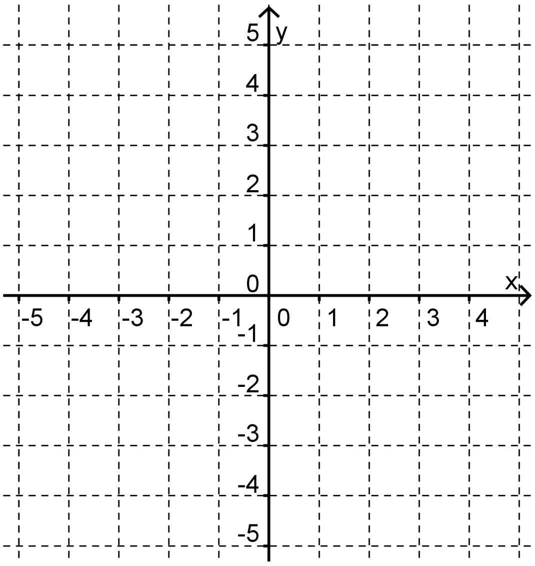
1.2. Vektoren addieren, Vektoren strecken

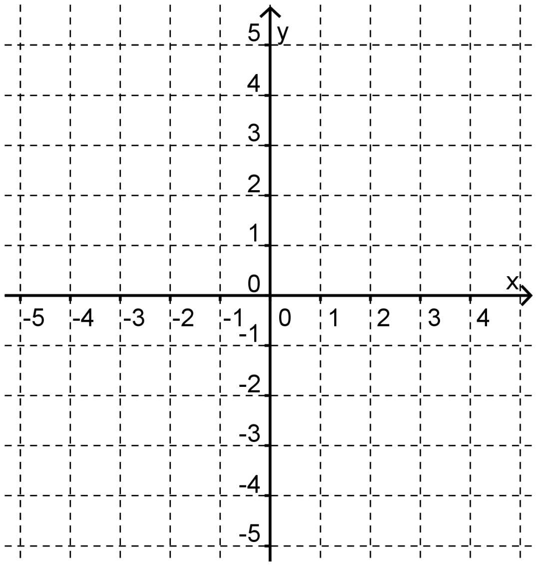
1. **Vektoren addieren**
   Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne den Vektor $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.

2. **Satz**
   Vektoren werden addiert/subtrahiert, indem man ....

   ....

3. **Illustration**
   Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Bestimme (konstruktiv) die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{a} - \vec{b}$.





   $\vec{a} + \vec{b}$ konstruieren bedeutet ....

   ....

   ....

   $\vec{a} - \vec{b}$ konstruieren bedeutet ....

   ....

   ....

4. **Vektoren mit einer Zahl multiplizieren**
   Gegeben ist der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

   Berechne $2 \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ und $-\frac{2}{3} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.

5. **Satz**

   Einen Vektor multipliziert man ....

   ....

   Wenn $t < 0$ ist, dann ....

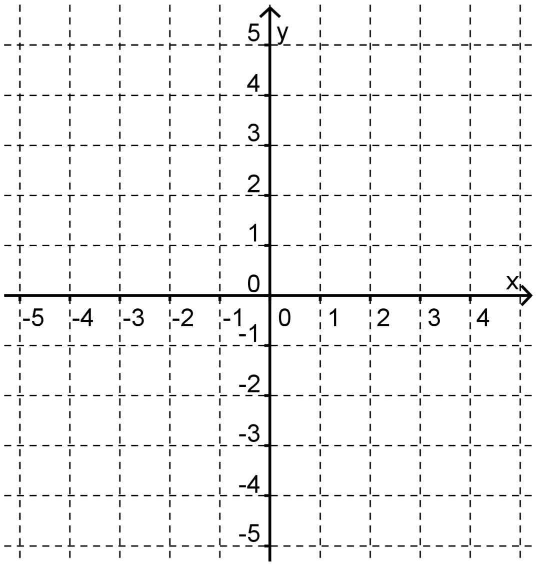
   Wenn $t = -1$ ist, dann ....

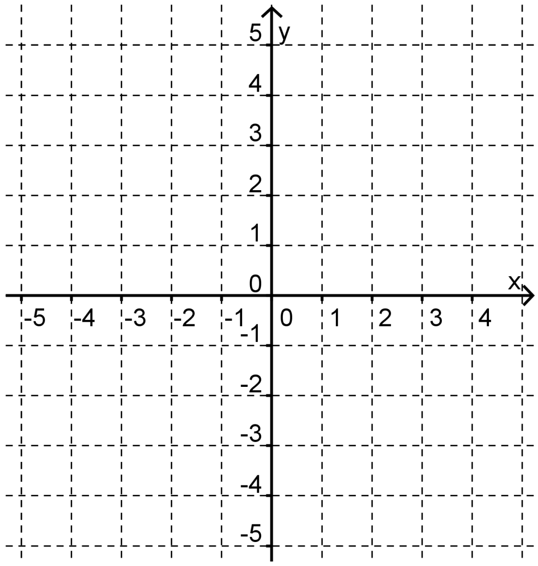
6. **Grundaufgaben**

   Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   a) Zeichne und berechne $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

   b) Zeichne und berechne $\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$.





Skizze

Zeichne zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Konstruiere $-\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}$

1.3. Freie Vektoren im Raum

1. **Definition**

   Das räumliche Koordinatensystem wird festgelegt durch:

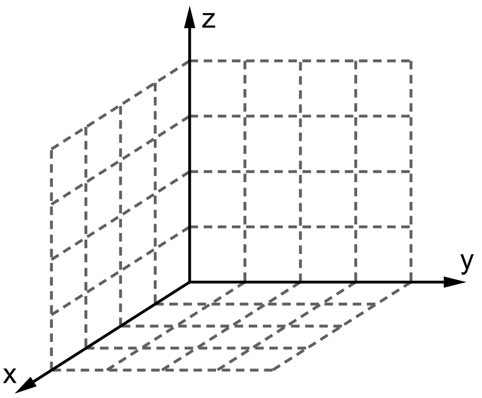
   ....

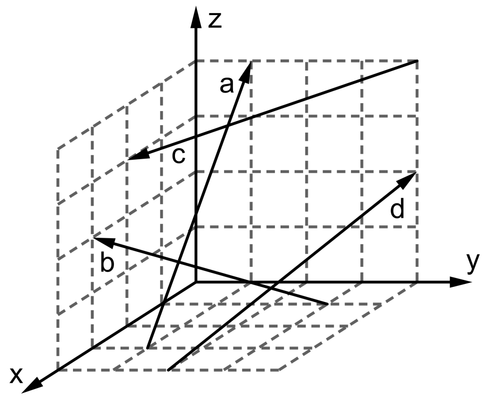
   ....

   Die drei Achsen bilden ....

   Die Komponentendarstellung eines räumlichen Vektors lautet $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

   Dabei nennt man a_1 die x-Komponente, a_2 die y-Komponente und a_3 die z-Komponente des Vektors $\vec{a}$.





2. **Ablesen von Vektoren**

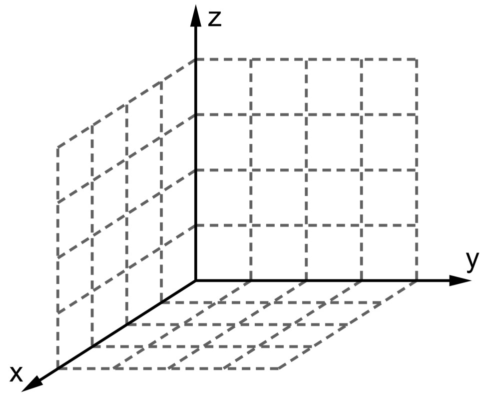
   Lies die Komponenten der dargestellten Vektoren aus der Figur ab.
   Hinweis: Alle Anfangs- und Endpunkte haben ganzzahlige Koordinaten.

3. **Vektoren einzeichnen**

   Zeichne die Vektoren in der Figur rechts ein.

   $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



4. **Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren**

Die Sätze aus der zweidimensionalen Betrachtung gelten auch in 3 Dimensionen.

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechne die Vektoren

a) $4 \cdot \vec{a} = ?$

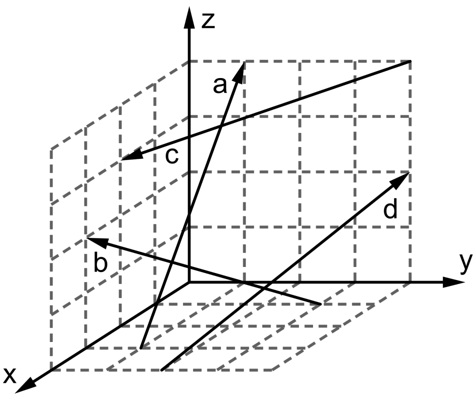
b) $\vec{c} - \vec{b} = ?$

c) $\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c} = ?$

Lernkontrolle

Berechne anhand der Figur :

$\frac{1}{2} \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} + \frac{3}{2} \cdot \vec{c} - \vec{d} = ?$



1.4. Die Norm eines Vektors

1. **Definition**

   Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ sei gegeben.

   Dann bezeichnet man die Länge oder Norm dieses Vektors mit ....

   und es gilt: ....

   Ein Vektor mit Länge 1 heisst ....

   Begründung: ....

   Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (in drei Dimensionen $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) heisst ....

   ....

   ....

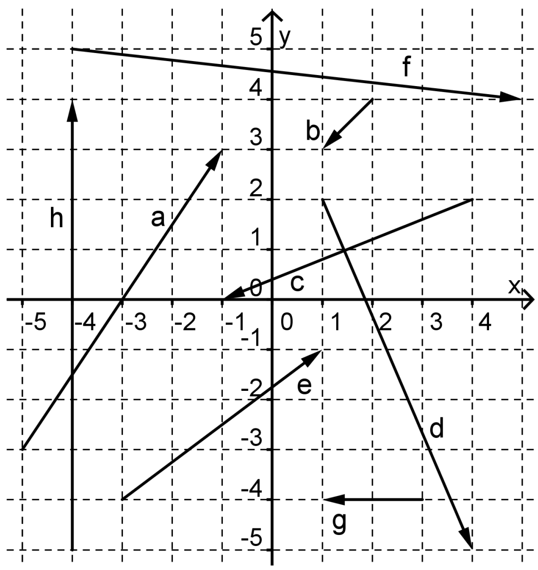
   ....

2. **Grundaufgaben**

   a) Berechne die Länge von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$.

   ....

   b) Berechne die Länge der Vektoren in der nebenstehenden Figur.



3. **Satz**

   Die Länge von Vektoren im Raum berechnet man mit der Formel

   Begründung: Entweder ....

   oder ....

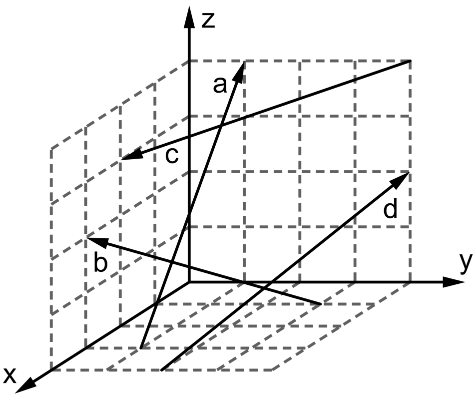
4. **Beispiele**

Berechne die Längen der Vektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechne auch die Längen der Vektoren in der nebenstehenden Figur.



5. **Fehlende Komponente**

Berechne die fehlende Komponente y des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \end{pmatrix}$ so, dass $\|\vec{a}\| = 10$ wird.

6. **Einen Vektor auf vorgegebene Länge strecken**

Berechne die Komponenten der Vektoren mit Länge 8, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$ parallel sind.

Einheitsvektoren

Gesucht sind die Einheitsvektoren parallel zu $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bestimme beide Lösungen.

7. **Übung**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1+t \\ 6 \end{pmatrix}$

a) Berechne $\|\vec{a}\| =?$

b) Berechne die Komponenten der zu $\vec{a}$ parallelen Vektoren mit Länge 5.

c) Bestimme t so, dass $\|\vec{b}\| = 10$ wird.

Übung

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Setze $t = 5$ und berechne $\|\vec{a}\| =?$

b) Setze $t = 12$ und bestimme die Komponenten der zu $\vec{a}$ parallelen Einheitsvektoren.

c) Bestimme t so, dass $\|\vec{a}\| = 10$ wird.

d) Wie lang ist der Vektor $\vec{a}$ mindestens?

1.5. Vektoren zerlegen

1. **Grundsituation**

   Zerlege den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ nach den Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Mathematische Bedeutung: ....

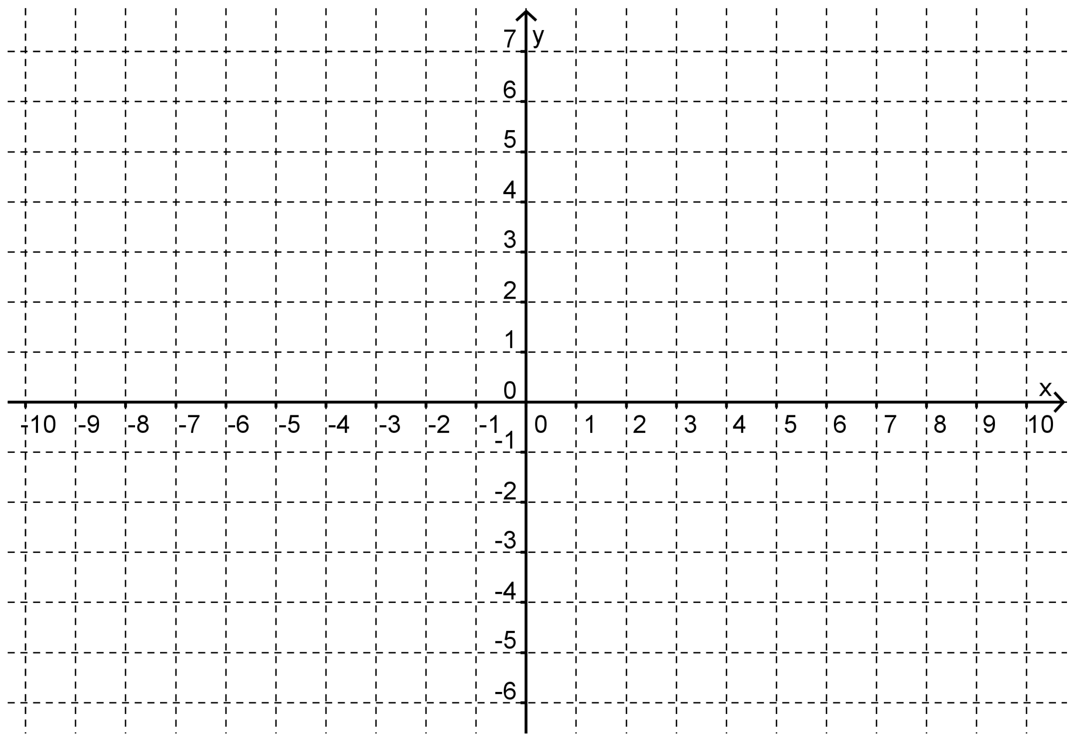
   ....

   Geometrische Bedeutung: ....

   ....

   Physikalische Bedeutung: ....

   ....



2. **Drei Dimensionen**

Im Raum müssen drei Vektoren vorgegeben sein.

Zerlege den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ nach $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Geometrische Bedeutung: ....

....

3. **Kollineare und komplanare Vektoren**

Vektoren heissen kollinear, wenn ....

....

d.h. wenn ....

Vektoren heissen komplanar, wenn ....

....

Technische Formulierung: ....

....

Kleine Knacknuss

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wenn man $\vec{d}$ nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zerlegen will, dann geht das nicht. Weshalb?

4. **Definition**
   Wenn $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ ist, dann ist $\vec{c}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

5. **Lineare Abhängigkeit**

   Zwei (oder mehr) Vektoren heissen linear abhängig, wenn ....

   ....

   ....

   ....

   Drei Vektoren im Raum sind linear abhängig, wenn ....

   ....

   Drei Vektoren in der Ebene ....

   ....

   Vier Vektoren im Raum ....

   ....

Lernkontrolle

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Weise nach, dass man einen (dieser drei Vektoren) nach den anderen beiden zerlegen kann.

b) Was folgert man aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a)?

1.6. Ortsvektoren

1. **Punkte im Koordinatensystem**

   Einen Punkt in der Ebene oder im Raum beschreibt man durch seine zwei resp. drei Koordinaten.

   Beispiele:
   $A(4|3)$, $B(-2|3)$, $C(1|-5)$, $D(-4|-4)$

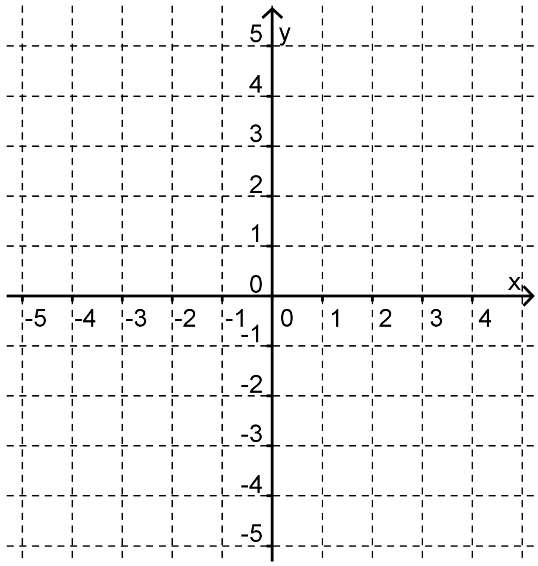
   Bezeichnung der Quadranten im $\mathbb{R}^2$:

   I. Quadrant ....

   II. Quadrant ....

   III. Quadrant........................

   IV. Quadrant........................



2. **Definition**

   Der Ortsvektor zum Punkt P ....

   ....

3. **Differenzvektor zwischen zwei Punkten**

   Gegeben sind die Punkte $A(3|5)$ und $B(7|-3)$. Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$.

4. **Rechenregel**

   ....

   ....

5. **Übungen zwei- und dreidimensional**

   a) $P(5|1)$, $Q(1|9)$. $\overrightarrow{PQ} =$ ....

   b) $A(2|1|-3)$, $B(-1|-4|8)$. $\overrightarrow{AB} =$ ....

   c) $R(6|-3|-7)$, $S(1|-2|-4)$. $\overrightarrow{SR} =$ ....

   d) $F(-3|5|-2)$, $T(-5|0|8)$. $\overrightarrow{FT} =$ ....

6. **Einen Vektor in einem Punkt anhängen**

   a) Gegeben ist $A(\,-1\,|\,-2\,)$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von B.

   b) Gegeben ist $C(\,7\,|\,-1\,)$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von D.

7. **Dasselbe im Raum**

   a) Gegeben ist $P(\,3\,|\,1\,|\,-5\,)$ und $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von Q.

   b) Gegeben ist $R(\,0\,|\,2\,|\,-6\,)$ und $\overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von S.

Übung

Gegeben ist $A(\,4\,|\,7\,|\,-3\,)$.

a) $D(\,8\,|\,1\,|\,-12\,)$. Bestimme $\overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von B.

c) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von C.

1.7. Anwendungen

1. **Parallelogramm**
   Gegeben sind drei Ecken $A(\,5\,|\,3\,|\,1\,)$, $B(\,2\,|\,0\,|\,-1\,)$, $C(\,8\,|\,-6\,|\,3\,)$ eines Parallelogramms $ABCD$. Bestimme die vierte Ecke D dieses Parallelogramms.

2. **Mittelpunkt einer Strecke**
   Bestimme den Mittelpunkt der Strecke PQ: $P(\,2\,|\,-1\,|\,7\,)$, $Q(\,8\,|\,5\,|\,9\,)$.

   1. Lösungsvariante ....

   ....

   2. Lösungsvariante ....

   ....

3. **Eine Strecke dritteln**
   Welche Punkte teilen die Strecke $(\,-4\,|\,7\,)$ $(\,5\,|\,4\,)$ in drei gleich lange Teilstrecken? Bestimme die Koordinaten der Teilungspunkte.

4. **Schwerpunkt**
   Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks ABC. $A(\,-4\,|\,7\,)$, $B(\,5\,|\,4\,)$, $C(\,2\,|\,1\,)$.

5. **Umfang**
Berechne den Umfang des Dreiecks ABC. $A(-4\,|\,7\,|\,2)$, $B(4\,|\,3\,|\,1)$, $C(2\,|\,1\,|\,2)$.

6. **Gleichschenkliges Trapez**
Zeige, dass die vier Punkte $A(-4\,|\,-4)$, $B(5\,|\,-1)$, $C(0\,|\,4)$, $D(-3\,|\,3)$ Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ sind.

7. **Vorgegebener Abstand**
Die Punkte $A(4\,|\,1\,|\,0)$, $B(9\,|\,y\,|\,-2)$ sollen Abstand 10 haben. Wie gross ist y?

Rhombus
Gegeben sind $(2\,|\,1\,|\,-1)$, $(5\,|\,7\,|\,5)$, $(-6\,|\,0\,|\,3)$, $(-3\,|\,6\,|\,9)$.
Zeige, dass diese Punkte Eckpunkte eines Rhombus sind. (Achtung: Die Punkte sind noch nicht mit A, B, C, D angeschrieben.

8. **Schwierigere Aufgabe**

Gegeben sind $A(1\,|\,-2)$ und $B(5\,|\,1)$.

a) Welcher Punkt auf der Strecke AB hat von A Abstand 2?

b) Bestimme y so, dass $C(10\,|\,y)$ auf der Geraden AB liegt.

c) Welche Punkte auf der x-Achse sind von A doppelt so weit entfernt wie von B?