

3. Das Vektorprodukt

3.1. Definition und Berechnung des Vektorprodukts

1. Übungen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m \\ -3m \\ 3n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2m \\ -4m \\ n \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{27} \\ 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

2. Ohne Taschenrechner zu lösen (Aus einer Prüfung)

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$
- $\|\vec{a}\| = ?$
- $\vec{a} \times \vec{b} = ?$
- Ist den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} (bei gleichem Anfangspunkt) ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer Winkel? (Begründe!)

3.2. Anwendungen des Vektorprodukts

1. Flächen

- Berechne die Fläche des Parallelogramms $ABCD$ mit den Punkten $A(2|1|-3)$, $B(4|2|-1)$, $C(5|4|-3)$.
- Berechne die Fläche des Dreiecks $A(2|7|1)$, $B(3|3|9)$, $C(6|10|2)$.
- $ABCD$ ist ein Parallelogramm mit $A(1|6|3)$, $B(5|2|5)$, $C(7|6|9)$.
 $F_{ABCD} = ?$

2. Einheitsvektoren

Bestimme die Einheitsvektoren, welche zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

3. Vier Punkte (Aus einer Prüfung)

Gegeben sind die Punkte $A(3|6|2)$, $B(4|4|0)$, $C(2|t|6)$, $D(1|8|5)$. (Die beiden Teilaufgaben sind unabhängig.)

- Das Dreieck ABC soll Fläche 3 erhalten. Wie gross ist t ?
- Für welchen Wert von t liegen die vier Punkte A , B , C und D in einer Ebene?

4. Säule

Von einer quadratischen Säule (Quader, dessen Grundfläche ein Quadrat ist), kennt man drei Eckpunkte der Grundfläche, nämlich $(3|1|4)$, $(5|3|5)$ und $(4|-1|6)$ und weiss, dass die Säule 15 Einheiten hoch ist.

Bestimme die Koordinaten aller anderen Eckpunkte.

5. Viereck (Aus einer Prüfung)

Gegeben sind die Punkte $A(0|-3|1)$, $B(2|2|5)$, $C(6|3|4)$, $D(6|0|1)$.

- Weise nach, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen, d.h. dass $ABCD$ ein ebenes Viereck ist.
- Berechne den Umfang dieses Vierecks.
- Um was für ein Viereck handelt es sich? (Begründe!)

6. Parallelogramm (Aus einer Prüfung)

Die Punkte $A(2|5|3)$, $B(6|1|10)$, $C(10|3|6)$ sollen Eckpunkte eines Parallelogramms $ABCD$ sein.

- Berechne die Koordinaten der vierten Ecke D
- Berechne Umfang und Fläche dieses Parallelogramms.
- Wie gross sind die Winkel dieses Parallelogramms?

7. Pyramide (Aus einer Prüfung)

Die Grundfläche der dargestellten geraden Pyramide ist ein Rechteck. Man hat die Punkte $A(4|0|7)$, $B(6|4|11)$ und $D(6|1|5)$. Die Raumhöhe $h = MS$ steht senkrecht zur Rechtecksebene und die Kanten AS , BS , CS und DS sind alle gleich lang, nämlich $s = \frac{9}{2}$.

- Weise nach, dass A , B und D Eckpunkte eines Rechtecks sind. Berechne die Koordinaten von C .
- Berechne die Koordinaten von M , die Länge von h und die Koordinaten von S .

