2. Mehrstufige Zufallsversuche

2.1. Die Pfadregeln

1. **Bemerkung**

   Häufig wird ein Versuch nicht nur einmal durchgeführt, sondern besteht aus mehreren Versuchsstufen:

   a) Im Zahlenlotto werden 6 Zahlen aus 49 gezogen.

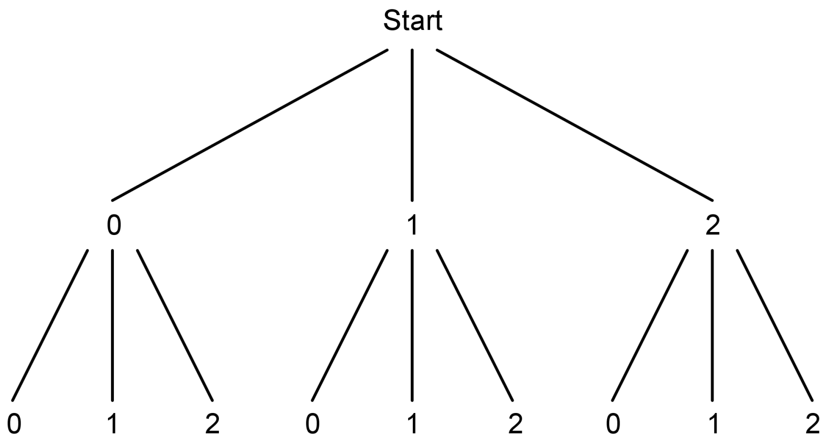
   b) Bei Umfragen werden wohl mehrere Personen gefragt.

   c) Bei allen Glücksspielen werden mehrere Spielrunden durchgeführt.

   d) (usw.)

2. **Musterbeispiel**

   Ein Glücksrad zeige die Zahlen 0, 1 und 2 mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten: $p(0) = 0.5$, $p(1) = 0.3$ und $p(2) = 0.2$.
   Das Rad werde zwei Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint in beiden Drehungen dieselbe Zahl?
   Die Ergebnismenge zu diesem Versuch hat neun Elemente, nämlich 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21 und 22. Dabei bedeutet 02 eine Null in der ersten und eine 2 in der zweiten Stufe.
   Am besten zeichnet man zu diesem Versuch ein **Baumdiagramm**:



$p =$ ....

Jedem Ergebnis entspricht also ein Pfad im Baum. Zwei gleiche Zahlen erscheinen in den Fällen 00, 11 und 22. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis beträgt

....

denn es erscheinen *entweder* zwei Nullen *oder* zwei Einsen *oder* zwei Zweier.

3. **Pfadregeln**

   Die beiden grundlegenden Regeln für Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Versuchen können am obigen Beispiel bereits herausgelesen werden:

   ....

   ....

   ....

   ....

   Die Pfadregeln entsprechen der Summen- bzw. Produktregel aus der Kombinatorik.

4. **Kontrollmöglichkeiten**

   Im Baumdiagramm hat man Kontrollmöglichkeiten:
   Die Summe aller Pfad-Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben.
   Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten von einem Knotenpunkt des Baumdiagramms *nach unten* muss ebenfalls 1 ergeben.

5. **Bemerkung**

   Die Beispiele auf den folgenden Seiten sind Musterbeispiele für verschiedene Anwendungen. Es geht stets darum, ein korrektes und möglichst günstiges Baumdiagramm herzustellen.
   Manchmal lohnt es sich auch, nur einen Teil des Baumdiagramms zu zeichnen.

2.2. Baumdiagramme aller Art

1. **Karten Ziehen**
   Aus einem normalen Kartenspiel mit 36 Karten (davon sind 9 Herz-Karten) zieht man zwei Karten ohne Zurücklegen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt man zwei Herz-Karten?

2. **Würfeln**
   Ein (nicht gefälschter) Würfel wird zweimal geworfen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau eine **6**?

3. **Ziehen ohne Zurücklegen**
   In einer Kiste befinden sich 5 weisse und 2 schwarze Kugeln. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei weisse und eine schwarze?

4. **Wetterprognose**
   Es gelte folgende Wetterregel: Auf einen trockenen Tag folgt mit Wahrscheinlichkeit 0.8 ebenfalls ein trockener Tag (und logischerweise mit Wahrscheinlichkeit 0.2 ein nasser). Auf einen Tag mit nassem Wetter folgt jedoch mit Wahrscheinlichkeit 0.6 ein nasser (und mit Wahrscheinlichkeit 0.4 ein trockener) Tag.
   Am Sonntag ist es trocken und wir wollen eine Prognose für Dienstag und Mittwoch machen.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es am Dienstag nass?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es am Mittwoch trocken?

5. **Unbekannte Wahrscheinlichkeit**
   Ein Glücksrad zeigt das Zeichen $\circledcirc$ mit Wahrscheinlichkeit p und das Zeichen $\boxplus$ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit, dabei genau ein $\circledcirc$ zu erzielen, beträgt 42%.
   Wie gross ist p?

6. **Unbekannte Anzahl Kugeln**

   In einem Behälter befinden sich zwei weisse und eine unbekannte Anzahl schwarzer Kugeln. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
   Die Wahrscheinlichkeit, dass man dabei genau eine weisse Kugel erwischt, beträgt 22%.
   Wie viele schwarze Kugeln hat es im Behälter?

7. **Günstige Wette**

   In einem Behälter befinden sich 10 Zettel mit Zahlen, nämlich 5 positive und 5 negative. Man zieht zwei Zahlen ohne Zurücklegen.
   Ist es günstiger, auf ein positives oder auf ein negatives Produkt zu wetten (oder spielt es keine Rolle)?

Wir stellen fest: ....

....

....

2.3. Spezielle Aufgabentypen

1. **Glücksrad**

   Ein Glücksrad zeigt das Zeichen $\circledcirc$ mit Wahrscheinlichkeit 0.8 und das Zeichen $\boxplus$ mit Wahrscheinlichkeit 0.2. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man mindestens ein $\circledcirc$?

2. **Mindestens ein Treffer**

   Ein milder Lehrer erteilt seine Noten auf folgende Art: er würfelt einen Würfel dreimal und gibt die höchste vorkommende Zahl als Note.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erteilt er eine **6**?

3. **Unbekannte Anzahl Versuche**

   Wie oft muss ein Würfel geworfen werden, damit mit 99.9%-iger Wahrscheinlichkeit (mindestens) eine **6** geworfen wird?

4. **Karten Ziehen**

   Beim Elfer-Raus hat man 80 Karten, nämlich je 20 in den Farben rot, gelb, grün und blau. Man zieht drei Karten ohne Zurücklegen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die gezogenen Karten unterschiedliche Farben?

5. **Wochentage**

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 7 zufällig gewählten Personen zwei am gleichen Wochentag geboren?

6. **Geburtstage**

   In einer Klasse befinden sich 23 Schülerinnen und Schüler (aber keine Zwillinge). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag haben? Der Einfachheit halber seien alle 366 Tage gleich wahrscheinlich.

7. **Verschieden lange Pfade**

   In einem Behälter befinden sich drei weisse und zwei rote Kugeln. Zwei Spieler ziehen abwechslungsweise eine Kugel ohne Zurücklegen. Wer zuerst eine rote Kugel zieht, gewinnt das Spiel.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler, der zuerst zieht?

8. **Unendlich lange Pfade**

   Zwei Spieler (A und B) werfen abwechslungsweise einen Würfel, wobei A beginnt. Wer die erste 6 wirft, gewinnt das Spiel. In welchem Verhältnis stehen die Gewinn-Wahrscheinlichkeiten?

9. **Repetitionsbeispiel**

Gegeben ist ein normaler Würfel.

a) Man würfelt dreimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint dreimal dieselbe Zahl?

b) Man würfelt fünfmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt (mindestens) eine Zahl mehrfach vor?

c) Wie oft muss man würfeln, damit man mit 99.99%-iger Sicherheit mindestens eine 5 erhalten hat?

Lernkontrolle

In einem Behälter hat man 6 weisse, 4 rote und n blaue Kugeln.
(Diese Ausgangslage gilt für alle Teilaufgaben.)

a) Setze $n = 2$. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man dreimal dieselbe Farbe?

b) Setze $n = 10$. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei weisse und eine blaue Kugel?

c) Man zieht zwei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei genau eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt exakt 50%.
Wie viele blaue Kugeln hat man, d.h. wie gross ist n?