2. Mehrstufige Zufallsversuche

2.1. Die Pfadregeln

1. **Kugeln ziehen**
   Aus einem Behälter mit 3 roten und 5 blauen Kugeln zieht man zwei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die Kugeln verschiedene Farbe?

2.2. Baumdiagramme aller Art

1. **Ziehen ohne Zurücklegen**
   In einem Behälter befinden sich 20 Kugeln, nämlich 3 blaue, 5 rote und 12 weisse. Man zieht 3 Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man nur weisse Kugeln?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite Kugel blau und die dritte rot?

2. **Wetter (Aus einer Prüfung)**
   Das Wetter ist sehr stabil: Es gibt nur sonnige und neblige Tage.
   Auf einen sonnigen Tag folgt mit 77%-iger Wahrscheinlichkeit wieder ein sonniger Tag, auf einen nebligen Tag folgt mit 66%-iger Wahrscheinlichkeit wieder ein nebliger Tag. Am Sonntag war es sonnig.
   a) Zeichne das vollständige Baumdiagramm für die nächsten drei Tage (bis Mittwoch).
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war der Dienstag neblig?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von Sonntag bis Mittwoch mindestens zwei neblige Tage?

3. **Zufallsgerät**
   Ein Zufallsgerät zeige nur die Zeichen **A** oder **B**. Es sei so gefälscht, dass in jedem Versuch mit Wahrscheinlichkeit 0.77 die gleiche Zahl erscheint wie im vorangegangenen Versuch. Im ersten Versuch erschien **A**.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man im vierten Versuch **B**?

4. **Kugeln (Aus einer Prüfung)**
   In einem Behälter hat man 5 blaue und 10 rote Kugeln. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
   a) Zeichne das vollständige Baumdiagramm zu diesem Versuch.
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wechselt die Farbe der gezogenen Kugel bei jeder Ziehung?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die erste und die dritte gezogene Kugel verschiedene Farbe?

5. **Unbekannte Anzahl Kugeln**

   In einem Behälter befinden sich zwei weisse und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. Man zieht vier Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass in diesen vier Ziehungen die Farbe der Kugel immer wechselt, betrage $\frac{1}{150}$.
   Wie viele rote Kugeln hat es im Behälter?

6. **Maximale Gewinnwahrscheinlichkeit**

   In einem Behälter befinden sich 5 weisse und eine gewisse Anzahl roter Kugeln. Man zieht 4 Kugeln einzeln ohne Zurücklegen und gewinnt, wenn die dritte gezogene Kugel weiss und die vierte gezogene Kugel rot ist.

   a) Es soll genau 8 rote Kugeln im Behälter haben.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man dieses Spiel?

   b) Wie viele rote Kugeln muss es im Behälter haben, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{4}{21}$ betragen soll?

   c) Die Gewinnwahrscheinlichkeit soll möglichst gross sein. Wie viele rote Kugeln muss es nun im Behälter haben?
   Berechne ausserdem diese maximale Gewinnwahrscheinlichkeit?

2.3. Spezielle Aufgabentypen

1. **Die erste Aufgabe des Chevalier de Méré (1607 - 1684)**

   Was ist wahrscheinlicher: bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen?

2. **Historisches Beispiel**

   Es ist zu bestimmen, mit wie viel Würfen A es wagen kann, mit 2 Würfeln 12 Augen auf einmal zu werfen.
   Aus der **ars conjectandi** (Vermutungskunst) von Jakob Bernoulli (1654 - 1705)
   Bemerkung: *es wagen können* heisst in diesem Zusammenhang: *seine Gewinn-Wahrscheinlichkeit ist grösser als die des Gegners, also grösser als 50%.*
   Die moderne Version liest sich also etwa so: Wie oft muss man zwei Würfel werfen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Doppelsechs grösser wird als 50%?

3. **Karten ziehen**

   A wettet mit B, dass er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von derselben Farbe sind, 4 Karten von verschiedener Farbe herausziehen wird.
   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A die Wette gewinnt?

4. **Das Rosinchen-Problem**

   Wie viele Rosinen muss man in 500g Teig mischen, damit jedes 50g-Brötchen mit 99%-iger Sicherheit mindestens eine Rosine enthält?

5. **Unendlich lange Pfade**

Zwei Spieler (A und B) drehen abwechslungsweise ein Glücksrad, wobei A beginnt. Wer das erste Gewinn-Zeichen $\circledast$ erhält, gewinnt das Spiel.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für ein $\circledast$, wenn man weiss, dass A mit 70%-iger Wahrscheinlichkeit das Spiel gewinnt?

6. **Ein Spiel (Aus einer Prüfung)**

Ein Glücksrad zeigt das Zeichen $\boxtimes$ mit Wahrscheinlichkeit p. Zwei Spieler, A und B, drehen das Glücksrad abwechslungsweise, wobei A beginnt. Wer zuerst das Zeichen $\boxtimes$ erhält, gewinnt das Spiel.

a) Setze $p = \frac{5}{8}$. In welchem Verhältnis stehen die Gewinn-Wahrscheinlichkeiten der beiden Spieler, $P(A)$ resp. $P(B)$? Berechne $P(A) : P(B)$

b) Wie gross muss p sein, damit $P(A) : P(B)$ kleiner wird als $4 : 3$?

7. **Repetitionsbeispiel**

Ein Glücksrad zeigt die Ziffern $0, 1, \ldots 9$ mit je gleicher Wahrscheinlichkeit.

a) Das Rad wird 3 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint dreimal dieselbe Ziffer?

b) Das Rad wird 7 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt (mindestens) eine Ziffer mehrfach vor?

c) Wie oft muss das Rad gedreht werden, damit mit 99.99%-iger Sicherheit mindestens eine Null erhalten wurde?

d) Zwei Spieler drehen das Rad abwechslungsweise, bis die erste Fünf erscheint. Wer die erste Fünf erhält, gewinnt einen Preis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler, der die erste Drehung ausführt?

8. **Glücksrad (Aus einer Prüfung)**

Ein Glücksrad hat 25 gleich grosse Sektoren, die mit den Zahlen **1**, **2**, **3**, … **24**, **25** beschriftet sind.

a) Das Rad wird zweimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite Zahl grösser als die erste?

b) Das Rad wird 17 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man 17 verschiedene Zahlen?

c) Wie oft muss man das Rad drehen, damit man mit 99.9%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine **9** erhalten hat?