4. Abhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit

4.1. Abhängige und unabhängige Ereignisse

1. **Einführungsbeispiel**

   Mr X zieht aus einem Kartenspiel von 36 Karten (je 9 Karten in den vier Farben Herz, Karo, Pik, Treff) eine Karte. Man sieht die Karte nicht, man könnte aber drauf wetten, dass Mr X ein Ass gezogen hat. Wie gross ist die Gewinn-Wahrscheinlichkeit? Nun schaut sich Mr X die Karte an und teilt uns mit, dass es sich bei der gezogenen Karte um eine Herz-Karte handelt. Wie gross ist jetzt die Gewinn-Wahrscheinlichkeit, wenn man drauf wettet, dass Mr X ein Ass gezogen hat?
   Offensichtlich ist die Gewinn-Wahrscheinlichkeit dieselbe. Entscheidend ist, dass die Gewinn-Wahrscheinlichkeit von der Information über die Herz-Karte unabhängig ist.

2. **Ein Vergleich**

   a) In einem Behälter befinden sich 5 weisse und 8 rote Kugeln. Man zieht 2 Kugeln **mit** Zurücklegen und betrachtet die Ereignisse A: *Die erste Kugel ist weiss* und B: *Die zweite Kugel ist rot.* Berechne $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$.

   b) In einem Behälter befinden sich 5 weisse und 8 rote Kugeln. Man zieht 2 Kugeln **ohne** Zurücklegen und betrachtet die Ereignisse A: *Die erste Kugel ist weiss* und B: *Die zweite Kugel ist rot.* Berechne $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$.

3. **Unabhängige Ereignisse**

   Bei der ersten Versuchsanordnung ist offenbar die zweite Ziehung von der ersten *unabhängig*, bei der zweiten Versuchsanordnung ist die zweite Ziehung vom Ausgang der ersten Ziehung *abhängig*.
   Das Ereignis A bezieht sich nur auf die erste, B nur auf die zweite Stufe. Das legt die folgende Definition für unabhängige Ereignisse nahe:

   ....

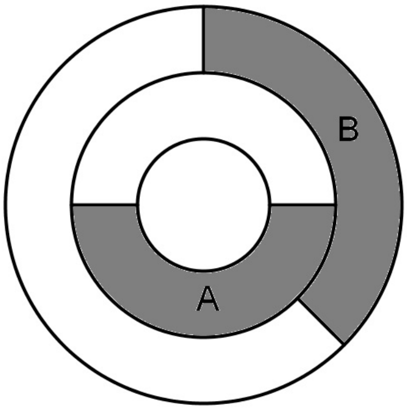
   ....

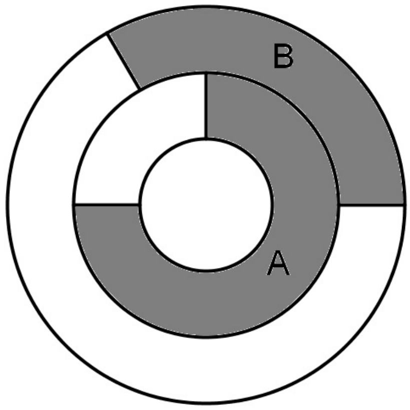
4. **Musterbeispiel**

   Aus einem Kartenspiel von 36 Karten zieht man eine Karte.
   Wir betrachten die folgenden Ereignisse:
   A: Die Karte ist eine Herz-Karte.
   B: Die gezogene Karte ist ein As.
   C: Die Karte ist rot (Herz oder Karo).
   D: Die Karte trägt eine Zahl (6..10).
   E: Die Karte ist der Pik Bube.
   Besteht Abhängigkeit zwischen A und B, A und C, A und D, A und E?

5. **Glücksräder**

Bestimme, ob bei den beiden Glücksrädern zwischen den schraffierten Bereichen A und B Abhängigkeit besteht.





(Beim linken Glücksrad hat B einen Zentriwinkel von 135°, beim rechten Glücksrad beträgt er 120°.)

Die Unabhängigkeit der beiden Ereignisse A und B im rechten Glücksrad kann man schön illustrieren:
Die Wahrscheinlichkeit für B ist genau $\frac{1}{3}$. Wenn man nun beispielsweise die Information erhält, dass A eingetreten ist, dann müsste man den Viertelskreis oben links abdecken, weil der weisse Bereich fürs A nicht mehr in Frage kommt. Im restlichen, sichtbar gebliebenen Teil ist die Wahrscheinlichkeit für B immer noch $\frac{1}{3}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit für B unabhängig von der Information über A.
Genau gleich könnte man die Information erhalten haben, dass A *nicht* eingetreten ist. In diesem Fall schaut man nur den Viertelskreis oben links an. In diesem Bereich ist die Wahrscheinlichkeit für B auch $\frac{1}{3}$.
Man kann sagen, dass die Ereignisse unabhängig sind, weil der Anteil von B im Ereignis A gleich gross ist wie der Anteil vom B im Teil, wo A *nicht* eingetreten ist.

Übung

Beim Elfer-Raus hat man 80 Karten in den Farben rot, blau, gelb und grün. Die Karten jeder Farbe sind von 1 bis 20 durchnummeriert. Man zieht eine Karte.
Betrachte die folgenden Ereignisse:
A: Die gezogene Karte ist rot.
B: Die gezogene Karte trägt eine durch 3 teilbare Zahl.
C: Die gezogene Karte zeigt eine zweistellige Zahl.
D: Die gezogene Karte ist nicht blau.
E: Die gezogene Karte zeigt eine Primzahl.
Bestimme, ob jeweils zwei Ereignisse abhängig oder unabhängig sind.
Hinweis: Insgesamt gibt es 10 Möglichkeiten. Mathematisch interessant sind die folgenden Situationen: A und B, B und C, C und D, D und E, A und D, C und E.

4.2. Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit

1. **Zwei Kriterien**

   In einem Betrieb werden total 60 Personen beschäftigt. Die Aufteilung nach den Kriterien A: *Geschlecht der Person* und B: *Sie ist in leitender Stellung* ist durch die folgende Tabelle gegeben:

	Damen	Herren
in leitender Stellung	2	6
nicht in leitender Stellung	20	32

   Aus der gesamten Belegschaft wird eine Person zufällig ausgewählt.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Dame? $P(A) = \ldots$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Person in leitender Stellung? $P(B) = \ldots$

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Dame in leitender Stellung? $P(A \cap B) = \ldots$

   d) Sind die beiden Kriterien abhängig oder unabhängig? ....

   Jetzt wird nur unter den Personen in leitender Stellung eine Person zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Dame?

   ....

2. **Definition**

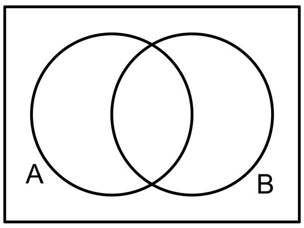
   ....

   ....

   ....

3. **Mengendiagramm**

   Es gilt $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.



4. **Zwei Kriterien**

Für einen anderen Betrieb mit total 60 Beschäftigten lautet die entsprechende Tabelle:

	Damen	Herren
in leitender Stellung	2	6
nicht in leitender Stellung	13	39

Es sei wieder A: *Bei der (zufällig ausgewählten) Person handelt es sich um eine Dame.* und B: *Die ausgewählte Person ist in leitender Stellung.*
Berechne wie oben:

a) $P(A)$ ....

b) $P(B)$ ....

c) $P(A \cap B)$ ....

d) $P(A|B)$ ....

e) $P(B|A)$ ....

f) Sind die beiden Ereignisse abhängig oder unabhängig? ....

5. **Folgerungen**

Für unabhängige Ereignisse A und B gilt $P(A) = P(A|B)$.

Wenn A von B unabhängig ist, dann ist auch B von A unabhängig.

6. **Musterbeispiel**

Aus einem Kartenspiel von 36 Karten zieht man eine Karte.
Wir betrachten die folgenden Ereignisse:
A: Die Karte ist eine Herz-Karte.
B: Die gezogene Karte ist ein As.
C: Die Karte ist rot (Herz oder Karo).
D: Die Karte trägt eine Zahl (6..10).
Bestimme:

a) $P(A) =$ ....

b) $P(B) =$ ....

c) $P(C) =$ ....

d) $P(A|B) =$ ....

e) $P(B|A) =$ ....

f) $P(B|C) =$ ....

g) $P(C|B) =$ ....

h) $P(A|D) =$ ....

i) $P(C|D) =$ ....

Übung

Betrachte nochmals das Elfer-Raus-Spiel:
A: Die gezogene Karte ist rot.
B: Die gezogene Karte trägt eine durch 3 teilbare Zahl.
C: Die gezogene Karte zeigt eine zweistellige Zahl.
D: Die gezogene Karte ist nicht blau.
E: Die gezogene Karte zeigt eine Primzahl.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten

a) $P(A|B)$

b) $P(A|C)$

c) $P(A|D)$

d) $P(D|A)$

e) $P(B|E)$

7. **Prüfverfahren**

Elektronik-Bauteile müssen geprüft werden, bevor sie in den Verkauf gelangen. Aus Erfahrung weiss man, dass ein gewisser Prozentsatz der Bauteile fehlerhaft ist.
Wir wählen aus einer grossen Lieferung ein Bauteil aus und prüfen dieses. Das Prüfverfahren soll so ausgelegt sein, dass ein defektes Bauteil mit hoher Wahrscheinlichkeit als defekt erkannt wird. Andrerseits soll ein korrektes Bauteil auch mit hoher Wahrscheinlichkeit als korrekt erkannt werden.
Dann stellen sich zwei Fragen:

a) Ein geprüftes Bauteil wird vom Test als fehlerhaft gemeldet. Der Test schlägt also Alarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Bauteil wirklich defekt?

b) Wenn man weiss, wie oft (in Prozenten) ein geprüftes Bauteil als fehlerhaft gemeldet wird, d.h. wie häufig vom Test Alarm gegeben wird: Kann man dann rückschliessen, wie gross der Prozentsatz der fehlerhaften Bauteile in der Lieferung ist?

8. **Berechnung**

Für die Berechnungen gehen von folgenden Annahmen aus: Wenn ein Bauteil defekt ist, dann wird das Prüfverfahren das Bauteil mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit auch als defekt erkennen. Es besteht also eine 10%-ige Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes Bauteil durch den Test nicht als solches erkannt wird. Wenn ein Bauteil korrekt ist, dann wird das im Testverfahren mit 96%-iger Wahrscheinlichkeit auch so festgestellt. Es besteht also eine Wahrscheinlichkeit von 4%, dass ein korrektes Bauteil fälschlicherweise als fehlerhaft gemeldet wird. (Fehlalarm)

a) Wir nehmen an, dass 6% der Bauteile fehlerhaft sind. Ein geprüftes Bauteil wird vom Test als fehlerhaft gemeldet. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich beim geprüften effektiv um ein defektes Bauteil handelt?

b) Wir nehmen an, dass in 7% der Testverfahren ein Alarm erfolgt, das Testverfahren also ein defektes Bauteil meldet. Wie gross ist dann der (prozentuale) Anteil der defekten Bauteile (aus der ganzen Lieferung)?

9. **Münzen**

   In einer Tasche sind 5 normale Münzen und eine gefälschte, die auf beiden Seiten **Kopf** zeigt. Man wählt zufällig eine Münze und wirft sie 3 mal. Dabei erscheint 3 mal **Kopf**.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man die gefälschte Münze erwischt?

10. **Wetterprognose**

    Es gelte folgende Wetterregel: auf einen trockenen Tag folgt mit Wahrscheinlichkeit 0.8 ebenfalls ein trockener Tag (und logischerweise mit Wahrscheinlichkeit 0.2 ein nasser). Auf einen Tag mit nassem Wetter folgt jedoch mit Wahrscheinlichkeit 0.6 ein nasser Tag.
    Am Sonntag der letzten Woche war es trocken, am Mittwoch hat es geregnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es unter den beschriebenen Voraussetzungen am Dienstag (auch schon) geregnet?

11. **Fehlalarm**

Ein Betrieb hat eine Einbruchalarmanlage eingerichtet. Wenn ein Einbruch stattfindet, erfolgt der Alarm mit 99%-iger Sicherheit. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms (z.B. wegen einer Maus) betrage 0.5%. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer bestimmten Nacht ein Einbruch erfolgt, sei 0.1%. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird tatsächlich eingebrochen?

Das niedrige Ergebnis ist zunächst erstaunlich, aber durchaus erklärbar:

. . . .

. . . .

Drei Kisten

Von drei Kisten enthält die erste 3 weisse und 5 rote Kugeln, die zweite 2 weisse und 3 rote sowie die dritte eine weisse und 2 rote Kugeln. Jemand wählt blind eine Kiste und zieht daraus eine Kugel. Die Kugel ist weiss.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die eine weisse Kugel aus der dritten Kiste?

12. **Theoretische Zwischenbemerkung**

13. **Blutgruppe**
    14% der Männer und 39% der Frauen einer Inselbevölkerung haben Blutgruppe B, was aus einem Test ersichtlich wurde. Insgesamt haben 27% der Menschen dieser Insel die Blutgruppe B. Wie gross ist der Anteil der Männer auf dieser Insel?

14. **Virositis**
    Ein Test für die (frei erfundene) Krankheit Virositis gibt bei einem erkrankten Patienten mit 84%-iger Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis. Bei einem gesunden Patienten gibt der Test aber mit 4%-iger Wahrscheinlichkeit auch ein positives Testergebnis. Insgesamt ergeben 13% der Tests ein positives Ergebnis.
    Welcher Anteil der Bevölkerung ist an Virositis erkrankt?

Parasitis

Ein Testverfahren prüft, ob eine Maus an der Krankheit Parasitis leidet. Wenn die Maus krank ist, dann zeigt das Verfahren dies mit 85%-iger Wahrscheinlichkeit an. Wenn die Maus gesund ist, dann ermittelt das Verfahren dies mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit.

a) Wir wissen, dass es in einer Zucht 6% kranke Mäuse hat. Angenommen, bei einer zufällig gewählten, getesteten Maus ergibt der Test, dass die Maus krank sei. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maus *wirklich* krank ist?

b) Im Verlaufe längerer Untersuchungen merkt man, dass beim Testen in einer (anderen) Zucht der Test in 32% der Fälle das Ergebnis *krank* liefert. Welcher Anteil an Mäusen in dieser Zucht ist krank?