

4. Abhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit

4.1. Abhängige und unabhängige Ereignisse

1. Uhr

Wir betrachten zu einem zufällig gewählten Moment zwischen 0:00 Uhr und 12:00 Uhr den Stundenzeiger einer Uhr. Es gelten die folgenden Ereignisse:

A : Der Zeiger liegt zwischen 1:00 Uhr und 6:00 Uhr.

B : Der Zeiger liegt zwischen 3:00 Uhr und 10:00 Uhr.

Sind A und B abhängig oder unabhängig?

2. Ein Vergleich

a) Ein Würfel wird einmal geworfen. Man betrachte die Ereignisse A : Wurf einer geraden Zahl, und B : Wurf einer Dreierzahl (durch 3 teilbare Zahl).

Sind A und B abhängig oder unabhängig?

b) Ein Glücksrad zeigt die Zahlen 1 bis 100 (inkl. Grenzen). Bestimme, ob die Ereignisse *gerade Zahl* und *Dreierzahl* abhängig oder unabhängig sind.

Stelle zuerst eine Vermutung auf und rechne dann.

3. Glücksrad

Ein Glücksrad zeige die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... 99, 100. Man definiert die Ereignisse

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$B = \{16, 17, 18, \dots, 35\}$$

$$C = \{17, 18, 19, \dots, n\}$$

$$D = \{18, 19, 20, \dots, m\}.$$

a) Sind A und B unabhängig?

b) Bestimme n so, dass A und C unabhängig werden.

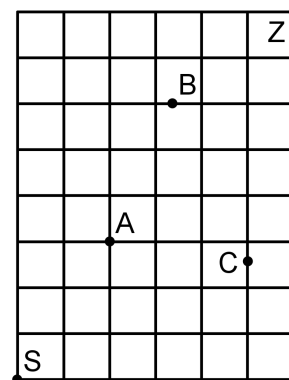
c) Wie gross muss m sein, damit B und D abhängig sind?

4. Mr X (Aus einer Prüfung)

Mr X geht im gezeichneten geschlossenen Gitter auf einem der möglichen kürzesten Wege von S nach Z . Wir betrachten die Ereignisse A , (resp. B resp. C), welche besagen, dass Mr X im Punkt A (resp. B , resp. C) vorbeigekommen ist.

a) Sind A und B abhängig oder unabhängig? Begründe durch Rechnung.

b) Sind A und C abhängig oder unabhängig? Begründe durch Rechnung oder Überlegung.



5. Karten (Aus einer Prüfung)

Auf 100 Karten hat man die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100. Man zieht eine Karte und betrachtet die folgenden Ereignisse:

A: Die gezogene Zahl ist durch 5 teilbar.

B: Für die gezogene Zahl z ist $12 \leq z \leq 55$.

C: Die gezogene Zahl ist durch 25 teilbar.

D: Für die gezogene Zahl z ist $33 \leq z \leq n$.

- Sind *A* und *B* abhängig oder unabhängig? Begründe.
- Wieso ist ohne Berechnung sofort klar, dass *A* und *C* abhängig sind? Begründe in wenigen Sätzen.
- Für welche Werte von n sind *A* und *D* unabhängig? Bestimme *alle* Lösungen.

4.2. Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit**1. Der Falschspieler**

Ein Spieler trägt zwei (äusserlich ununterscheidbare) Würfel bei sich. Einer ist ein üblicher Würfel, aber der andere ist so gefälscht, dass er nur die Zahlen 5 und 6 (je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) zeigt.

Man wählt nun einen dieser Würfel und wirft ihn dreimal. Dabei erscheinen drei Sechser.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man den gefälschten Würfel erwischt?

2. Drei Kisten

In drei Kisten befinden sich je drei weisse Kugeln, ausserdem enthalten die Kisten (von links gezählt) eine, zwei resp. drei schwarze Kugeln. Man wählt blind eine Kiste und zieht zwei Kugeln mit einem Griff.

Es handelt sich um eine weisse und eine schwarze Kugel.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man die mittlere Kiste gewählt?

3. Zwei Kisten (Aus einer Prüfung)

Man hat zwei Kisten. Die erste enthält 3 weisse und 4 rote Kugeln, die zweite enthält 5 weisse und 6 rote Kugeln.

- Mr X wählt blind eine Kiste und zieht drei Kugeln mit Zurücklegen. Dabei erhält er eine weisse und zwei rote Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die zweite Kiste gewählt?
- Mr Y wählt blind eine Kiste und zieht drei Kugeln mit einem Griff. Auch er erwischt eine weisse und zwei rote Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die zweite Kiste gewählt?

4. Kugeln ziehen

Aus einem Behälter mit 7 gelben und 5 blauen Kugeln zieht man drei Kugeln einzeln ohne Zurücklegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel gelb ist, wenn man weiss, dass die dritte Kugel eine blaue ist?

5. **Wetter**

Es gilt folgende Wetterregel für sonnige und regnerische Tage: Auf einen sonnigen Tag folgt mit Wahrscheinlichkeit 72% wieder ein sonniger Tag, hingegen folgt auf einen regnerischen Tag mit 45%-iger Wahrscheinlichkeit wieder ein regnerischer Tag.

Am Montag schien die Sonne.

Angenommen, es hat am Donnerstag geregnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war somit der Dienstag ein sonniger Tag?

6. **Gefälschte Münzen**

Martina hat in einem Behälter einige symmetrische Münzen und drei gefälschte, die auf beiden Seiten **Kopf** zeigen. Sie wählt blind eine Münze und wirft in 4 Versuchen nur **Kopf**.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine gefälschte Münze erwischt hat, beträgt in diesem Fall genau $\frac{1}{2}$.

Wie viele symmetrische Münzen hat Martina im Behälter?

7. **Vitaminmangel**

Ein Test für Vitaminmangel zeigt mit 95%-iger Sicherheit das korrekte Ergebnis. (Anders formuliert: Bei einer Person mit Vitaminmangel ist der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% *positiv*, bei einer gesunden Person ohne Vitaminmangel gibt der Test mit 5%-iger Wahrscheinlichkeit Fehlarbeit und zeigt ein *positives* Ergebnis.).

- a) Welcher Anteil der Bevölkerung hat Vitaminmangel, wenn 8% aller Tests ein *positives* Ergebnis liefern?
- b) Mr X kommt zum Arzt und lässt sich untersuchen. Das Ergebnis ist *positiv*. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr X wirklich Vitaminmangel?

8. **Kaninchen (Aus einer Prüfung)**

Ein Tierarzt untersucht Kaninchen auf die Krankheit K. Der Test gibt mit 90%-iger Sicherheit ein krankes Kaninchen auch als erkrankt an. Ein gesundes Kaninchen wird mit 95%-iger Sicherheit als gesund erkannt.

- a) Zeichne das Baumdiagramm zu diesem Versuch.
- b) Wir nehmen an, dass 12% aller Kaninchen die Krankheit K haben. Der Test zeigt bei einem untersuchten Kaninchen an, dass es erkrankt sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Kaninchen tatsächlich erkrankt?
- c) Langfristige Untersuchungen zeigen, dass bei 17.5% aller Untersuchungen der Test ein Kaninchen als erkrankt anzeigt. Welcher Anteil der Kaninchen hat die Krankheit K?