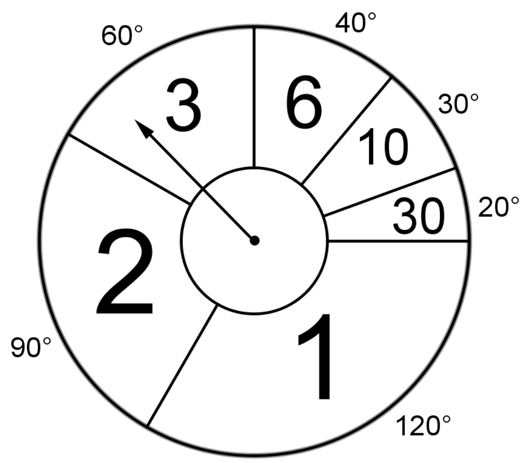
2. Zufallsgrössen

2.1. Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgrösse

1. **Glücksrad**

   Betrachte das nebenstehende Glücksrad. Der Zeiger bleibt zufällig auf einer Zahl stehen. Die so erhaltene Zahl stellt den entsprechenden Gewinn (beispielsweise in Fr.) dar.
   Welcher durchschnittliche Gewinn pro Versuch ist bei diesem Glücksrad zu erwarten?
   Schätze zunächst, bevor du rechnest!



   Wir berechnen den durchschnittlichen, pro Spielrunde zu erwartenden Gewinn.

2. **Theoretische Bemerkung**

   Eine Zufallsgrösse ist grundsätzlich eine Funktion, die jedem Ergebnis ω eines Zufallsversuchs eine (reelle) Zahl zuordnet. Diese Zahl kann man als Gewinn deuten.

2.2. Angewandte Beispiele aller Art

1. **Karten ziehen**
   Der Spieler zieht aus einem normalen Kartenspiel von 36 Karten eine Karte.
   Wenn es sich um eine Herz-Karte handelt, dann gewinnt er 4 Fr., wenn es sich um ein Ass handelt, gewinnt er 9 Fr. (Zieht er das Herz-Ass, dann gewinnt er sogar 13 Fr.)
   Die Zufallsgrösse X bezeichnet den Gewinn. Berechne $E(X)$ und $V(X)$.

2. **Kugeln ziehen**
   Ein Behälter enthält zwei rote und fünf weisse Kugeln. Man zieht drei Kugeln mit einem Griff. Falls es zwei weisse und eine rote sind, gewinnt man 2 Fr., sonst verliert man 3 Fr.

   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, 2 Fr. zu gewinnen?
   b) Lohnt sich das Spiel langfristig für den Veranstalter oder für den Spieler?

3. **Faires Spiel zum Ersten**

   Ein (üblicher, symmetrischer) Würfel wird geworfen. Erscheint eine **1** im ersten Wurf, dann gewinnt man 3.- und das Spiel ist zu Ende. Sonst wirft man weiter. Erscheint eine **2** im zweiten Wurf, dann gewinnt man 4.- und das Spiel ist zu Ende. Sonst wirft man weiter. Erscheint eine **3** im dritten Wurf, dann gewinnt man 6.-, andernfalls gewinnt man nichts.
   Nach drei Würfen ist das Spiel auf alle Fälle beendet.
   Wie viel muss als Einsatz verlangt werden, damit dieses Spiel fair ist?

4. **Faires Spiel zum Zweiten**

   In einem Behälter befinden sich fünf schwarze und zwei weisse Kugeln. Man zieht drei Kugeln mit einem Griff. Zieht man mindestens eine weisse Kugel, so gewinnt man x Fr., andernfalls verliert man 7.-.
   Bestimme x so, dass das Spiel fair ist.

5. **Faire Spiele**

   Ein Spiel ist fair, wenn

6. **Anzahl Versuche zum Ersten**

   In einem Behälter hat man 3 weisse und 2 rote Kugeln. Man zieht einzeln und ohne Zurücklegen so lange, bis man eine rote Kugel gezogen hat. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Anzahl benötigter Ziehungen.
   Berechne $E(X)$ und $V(X)$.

7. **Anzahl Versuche zum Zweiten**

   Wie lange dauert ein Tennis-Match? (Best of Five)
   Eine Münze wird so lange geworfen, bis eine Seite (egal welche) zum dritten Mal erschienen ist. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Anzahl benötigter Würfe.
   $E(X) = ?$

8. **Anzahl Treffer zum Ersten: Ziehen mit Zurücklegen**
   Ein Würfel wird drei Mal geworfen. Es sei X die Anzahl geworfener Sechser.
   Bestimme die Verteilungstabelle der Zufallsgrösse X sowie $E(X)$, $V(X)$ und $\sigma(X)$.

   Für das Ergebnis von $E(X)$ gibt es eine anschauliche Erklärung:

9. **Anzahl Treffer zum Zweiten: Ziehen ohne Zurücklegen**
   In einem Behälter befinden sich 2 weisse und 3 rote Kugeln. Man zieht 3 Kugeln ohne Zurücklegen. X bezeichne die Anzahl gezogener weisser Kugeln.
   Bestimme $E(X)$.

10. **Unbekannte Wahrscheinlichkeit**

Ein Glücksrad zeige **doppelt** mit Wahrscheinlichkeit p und **halb** mit Wahrscheinlichkeit $1-p$.
Zu Beginn habe man ein Vermögen von 4.-. Das Rad wird zweimal gedreht. Jedesmal wenn **doppelt** bzw. **halb** erscheint, wird das Vermögen verdoppelt bzw. halbiert. Bestimme p so, dass das zu durchschnittliche zu erwartende Vermögen nach den beiden Drehungen genau 4.- beträgt.

Aus einer Prüfung

In einem Behälter hat man zwei weisse und n rote Kugeln. Man zieht Kugeln einzeln ohne Zurücklegen und so lange, bis man eine rote Kugel gezogen hat. (Wenn man eine rote Kugel gezogen hat, ist das Spiel sofort zu Ende.)
Erscheint eine rote Kugel bei der ersten Ziehung, dann verliert man 3 Fr.; erscheint eine rote Kugel bei der zweiten Ziehung, dann gewinnt man 20 Fr.; erscheint eine rote Kugel bei der dritten Ziehung, dann verliert man 7 Fr.

a) Setze $n = 8$ und bestimme den durchschnittlichen zu erwartenden Gewinn.

b) Für welche Anzahl n ist das Spiel fair?

2.3. Zwei wichtige Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

1. **Glücksrad**

   Ein Glücksrad zeigt die Zahlen **1**, **2** und **3** mit den Wahrscheinlichkeiten $p(\mathbf{1}) = 0.3$, $p(\mathbf{2}) = 0.6$ und $p(\mathbf{3}) = 0.1$.

   a) Das Glücksrad wird einmal gedreht und die erhaltene Zahl sei der Gewinn X. Berechne $E(X)$ und $V(X)$

   b) Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man gewinnt das Fünffache der erhaltenen Zahl. Die Zufallsgrösse sei Y. Berechne $E(Y)$ und $V(Y)$

2. **Satz**

   Begründung:

3. **Drei Experimente**

In einem Behälter befinden sich 4 Kugeln. Eine ist mit **2** markiert, die übrigen mit **1**.

a) Man zieht *eine* Kugel. Die Zufallsgrösse X bezeichne die gezogene Zahl.
Berechne $E(X)$ und $V(X)$.

b) Man zieht zweimal *mit* Zurücklegen. Y bezeichne die Summe der gezogenen Zahlen.
Berechne $E(Y)$ und $V(Y)$ und vergleiche mit $E(X)$ resp. $V(X)$

c) Man zieht zweimal *ohne* Zurücklegen. Z bezeichne die Summe der gezogenen Zahlen.
Berechne $E(Z)$ und $V(Z)$ und vergleiche mit $E(X)$ resp. $V(X)$

4. **Satz**

5. **Übung**

Die 12 Seitenflächen eines Dodekaeders sind mit den Zahlen 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5 beschriftet. Das Dodekaeder wird 4 Mal geworfen.
Die Zufallsgrösse X bezeichnet die Summe der vier geworfenen Zahlen.
Berechne $E(X)$ und $V(X)$.