2. Zufallsgrössen

2.1. Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgrösse

1. **Glücksrad**

   Ein Glücksrad zeigt die Zahlen 0, 1, 2, 3 mit den Wahrscheinlichkeiten $p(0) = 0.4$ sowie $p(1) = 0.3$, $p(2) = 0.2$ und $p(3) = 0.1$. Die Zufallsgrösse X bezeichne die bei einer Drehung erhaltene Zahl. Bestimme $E(X)$, $V(X)$ und $\sigma(X)$.

2.2. Angewandte Beispiele aller Art

1. **Kugeln ziehen**

   Aus einem Behälter mit 5 weissen und 3 schwarzen Kugeln zieht man 3 Kugeln mit einem Griff. Wenn man ausschliesslich weisse Kugeln zieht, dann gewinnt man 10.–, andernfalls verliert man 5.–. Berechne den durchschnittlich zu erwartenden Gewinn.

2. **Holzwürfel**

   Ein Holzwürfel wird aussen blau gefärbt. Anschliessend zersägt man ihn in $3 \times 3 \times 3 = 27$ kleinere Würfelchen. Von diesen wird eines blind gezogen und die Anzahl blauer Seitenflächen sei der Gewinn X. Berechne $E(X)$, $V(X)$ und $\sigma(X)$.

3. **Ziehen ohne Zurücklegen**

   In einer Kiste befinden sich 7 weisse und 5 rote Kugeln. Man zieht drei Mal ohne Zurücklegen. X sei die Anzahl weisser gezogener Kugeln.

   a) Stelle die Verteilungstabelle auf.

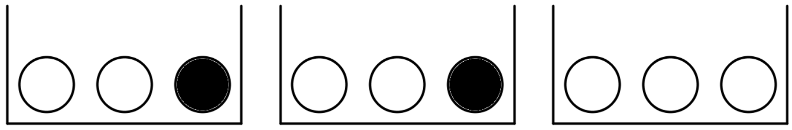
   b) Bestimme $E(X)$, $V(X)$ und $\sigma(X)$.

4. **Mr X spielt gegen Mr Y (Aus einer Prüfung)**

   Aus einem Behälter mit anfänglich 9 weissen und 6 roten Kugeln zieht man drei Kugeln. Man gewinnt 4 Franken, wenn man *genau eine* weisse Kugel zieht; und man verliert 1 Franken, wenn man *genau eine* rote Kugel zieht. In allen anderen Fällen gewinnt man nichts.
   Mr X zieht mit Zurücklegen, Mr Y zieht ohne Zurücklegen.
   Wer von den beiden erzielt den grösseren zu erwartenden Gewinn?

5. **Ein Spiel**

   Eine Kugel wird aus der ersten Kiste (links) zufällig gezogen und in die zweite Kiste gelegt. Dann wird eine Kugel aus der zweiten Kiste zufällig gezogen und in die dritte Kiste gelegt. Dann zieht man eine Kugel aus der dritten Kiste. Ist diese Kugel schwarz, gewinnt man 120.–, sonst gewinnt man nichts.
   Es sei X der Spielgewinn. Berechne $E(X)$.



6. **Jasskarten**

   Ein normales Kartenspiel enthält 36 Karten, davon 4 Asse und 9 Herzkarten.
   Man zieht eine Karte. Wenn man ein Ass zieht, gewinnt man 9.–; zieht man eine Herzkarte, dann gewinnt man 3.– (also gewinnt man beim Ziehen des Herz-Ass 12.–).
   Welchen Einsatz wird der Veranstalter verlangen, damit dieses Spiel fair ist?

7. **Ein Spiel (Aus einer Prüfung)**

   In einem Behälter hat man drei weisse, zwei blaue und eine schwarze Kugel. Man zieht Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen so lange, bis man eine blaue oder die schwarze zieht, jedoch höchstens dreimal.
   Erscheint die schwarze Kugel (bevor eine blaue Kugel erhalten wurde), dann verliert man sofort 6 £ und das Spiel ist zu Ende. Erscheint eine blaue Kugel in der ersten (resp. zweiten resp. dritten) Ziehung, so gewinnt man 1 £ (resp. 3 £ resp. 10 £) und das Spiel ist zu Ende. Erscheinen in den drei Ziehungen weder eine blaue noch die schwarze Kugel, so gewinnt man nichts.
   Berechne den durchschnittlichen zu erwartenden Gewinn.

8. **Kugeln ziehen (Aus einer Prüfung)**

   In einem Behälter hat man 12 weisse und 8 rote Kugeln. Man zieht Kugeln mit einem Griff. Wenn man genau eine weisse erwischt, dann gewinnt man 4 Fr.; wenn man genau drei weisse erwischt, dann gewinnt man 5 Fr. In allen anderen Fällen verliert man 1 Fr.
   Spieler A zieht 5 Kugeln, Spieler B zieht 6 Kugeln.
   Wer von den beiden erzielt den höheren durchschnittlichen Gewinn?

9. **Gewinnberechnung (Aus einer Prüfung)**

   In einem Behälter befinden sich 10 Kugeln, nämlich 3 blaue und 7 rote.
   Man zieht Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. (Zeichne ein Baumdiagramm!)
   Wenn die erste gezogene Kugel blau ist, dann gewinnt man 8 Fr. und das Spiel wird sofort beendet. Andernfalls zieht man weiter. Wenn die zweite Kugel rot ist, dann gewinnt man 9 Fr. und das Spiel wird sofort beendet. Andernfalls zieht man nochmals. Wenn die dritte Kugel rot ist, dann gewinnt man 10 Fr., wenn diese Kugel blau ist, gewinnt man 6 Fr. Nach drei Ziehungen ist das Spiel in jedem Fall fertig.
   Es sei G der Spielgewinn. Berechne $E(G)$, $V(G)$ und $\sigma(G)$.

10. **Fairer Gaukler**

    Ein fairer Gaukler bietet folgendes Spiel an: Man wirft einen Würfel. Wirft man eine **6**, dann gewinnt man sofort 15 Dinar und das Spiel ist zu Ende. Andernfalls würfelt man nochmals. Wirft man dann eine **6**, so gewinnt man 22 Dinar, andernfalls verliert man x Dinar. Wie gross ist x?

11. **Faires Spiel**

    In einem Behälter hat man 5 Kugeln, die mit der Zahl 1, und drei Kugeln, die mit x markiert sind. Man zieht zwei Kugeln ohne Zurücklegen und das Produkt der beiden Zahlen ist der Gewinn. Wie gross muss x sein, damit das Spiel fair ist?

12. **Faires Spiel**

    Ein Glücksrad zeigt ⊠ mit Wahrscheinlichkeit p. Wenn man in vier Drehungen genau ein ⊠ erhalten hat, dann gewinnt man 5 Dinar, andernfalls verliert man einen Dinar. Für welchen Wert von p ist dieses Spiel fair?

13. **Noten würfeln**

    Ein unbekannter Lehrer gibt seine Noten wie folgt: er wirft zwei Würfel und gibt die höchste vorkommende Zahl als Note.
    Welcher Notendurchschnitt ist von diesem Lehrer zu erwarten?

2.3. Zwei wichtige Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

1. **Ein Vergleich**

   In einem Behälter hat man 3 weisse und 5 blaue Kugeln. Man zieht drei Kugeln und gewinnt pro gezogene blaue Kugel 1 Dinar. Mr X zieht mit Zurücklegen, Mr Y zieht ohne Zurücklegen. Wer erzielt längerfristig gesehen den grösseren durchschnittlichen Gewinn?

2. **Glücksrad**

   Ein Glücksrad zeigt die Zahlen 0, 1, 2, 3 mit den Wahrscheinlichkeiten $p(0) = 0.4$ sowie $p(1) = 0.3$, $p(2) = 0.2$ und $p(3) = 0.1$. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Summe der bei acht Drehungen erhaltenen Zahlen. Bestimme $E(X)$, $V(X)$ und $\sigma(X)$.